МЕТОДИЧНІ НОТАТКИ – З ДОСВІДУ ВИКЛАДАННЯ ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ В ВИЩІЙ ШКОЛІ

УДК 519.65 PACS 02.30.-F, 02.60.Ed, 02.60.Lj, 02.70.Dh, 04.25.-g

В.П. Денисюк, О.В. Негоденко

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СПЛАЙНІВ

В роботі розглядаються деякі системи фундаментальних функцій, які застосовуються в задачах побудови наближених розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь. До систем фундаментальних функцій, найбільш відомих на теперішній час, належать система фундаментальних функцій Лагранжа та системи повних, парних та непарних фундаментальних тригонометричних многочленів. Проте на рівномірних сітках існують і інші системи фундаментальних функцій, зокрема системи поліноміальних фундаментальних сплайнів, а також тригонометричних повних, парних та непарних фундаментальних сплайнів . Деякі з таких систем і розглядаються в даній роботі.

Ключові слова: фундаментальні функції, функції Лагранжа, звичайні диференціальні рівняння, прості поліноміальні сплайни, тригонометричні сплайни, математичні моделі.

1. Вступ

Сучасна наука характеризується стрімким зростанням обсягів наукової інформації. В свою чергу, можливості комп'ютерів перевищують можливості людини в галузі обробки даних. Саме сполучення цих факторів і стало передумовами комп'ютеризації науки. Це дозволяє при побудові математичних моделей використовувати більш складні математичні об'єкти і методи.

Раніше в задачах наближення функцій використовували переважно многочленні наближення; застосування ж потужніших засобів обчислення надало можливості застосовувати в таких задачах інші системи функцій, зокрема, поліноміальні і тригонометричні сплайни [1].

В задачах прикладної теорії наближень в ролі наближуючих функцій зручно використовувати узагальнені многочлени по деяким системам функцій, коефіцієнтами яких є самі значення наближуваної функції. Системи функцій, які дозволяють отримати таке подання, називають **фундаментальними.**

Важливість такого підходу пояснюється тим, що при застосуванні лінійних методів обробки наближуючих функцій обробці підлягають лише самі фундаментальні функції. Цей факт у більшості випадків дозволяє проводити необхідні обчислення по обробці експериментальних даних в два етапи. На першому етапі проводиться обчислення, пов'язані з обробкою фундаментальних функцій (ці обчислення можуть бути проведені попередньо), на другому ж етапі проводяться обчислення, що враховують значення наближуваних функцій.

Проведення двоетапної обробки має ряд переваг, серед яких відзначимо можливість обрахування експериментальних даних у масштабі реального часу, що часто є важливим в багатьох задачах обробки даних.

До систем фундаментальних функцій, найбільш відомих на теперішній час, належать системи фундаментальних інтерполяційних функцій Лагранжа, системи повних, парних і непарних фундаментальних інтерполяційних тригонометричних многочленів. Ці системи функцій привертають увагу тим, що алгебраїчні і тригонометричні многочлени є лінійно щільними множинами у просторах відповідно неперервних і періодичних неперервних функцій. Проте існують і інші системи фундаментальних функцій, зокрема системи поліноміальних і тригонометричних фундаментальних сплайнів. [2].

Фундаментальні функції можуть застосовуватися в багатьох задачах науки і техніки, де для кількісного опису фізичних явищ використовують математичні моделі. Такі моделі часто являють собою системи звичайних диференціальних рівнянь, на які накладаються певні крайові та початкові умови. Саме в задачах побудови наближених розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь використовують фундаментальні функції.

2. Постановка задачі

Нехай маємо крайову задачу для звичайного лінійного диференціального рівняння

$$L_m u(x) = f(x);\ m = 1, 2, ... \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0; \\ u(T) &= u_T. \end{aligned} \tag{2}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_N^*(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n(x), \tag{3}$$

Існують різні способи визначення параметрів α_m, які входять до виразу (3). Ми застосовували метод колокацій.

Для цього підставляючи $u_N^*(x)$ в (2), отримуємо нев'язку

$$\varepsilon(\mathrm{x}, \alpha_1, ..., \alpha_N) = L_m u_N^*(x) - f(x). \tag{4}$$

Задамо на відрізку $[0, T]$ рівномірну сітку $\Delta_N = \{x_j\}_{j-1}^{N}$, $x_j = \dfrac{T}{N-1}(j-1)$, ($N = 2n+1,\ n = 1, 2, \, ...$). Як відомо [3] метод колокацій полягає в тому, що невизначені параметри шукають з системи рівнянь

$$\varepsilon(x_l, \alpha_1, ..., \alpha_N) = 0,\ (j = 1, 2, ..., N)$$

При застосуванні методу коллокацій важливу роль відіграє вибір базисних функцій $\psi_j;\ j = 1, 2, ...N$, що входять до (3). Ми розглянули випадок, коли в ролі базисних функцій виступають фундаментальні функції.

Як відомо [4] фундаментальними на сітці Δ_{N} називають функції, які задовольняють умовам

$$\psi_j(\mathrm{x}_i) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & \mathrm{i} \neq \mathrm{j}; \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, ...N.$$

Застосування фундаментальних функцій в задачах побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь має ряд переваг, головною з яких є те, що в ролі невизначених параметрів в (2) виступають значення наближеного шуканого розв'язку у вузлових точках x_j, ($j = 1, \, ... \, , N$). Зрозуміло, що постановка задачі у термінах вузлових точок дозволяє асоціювати параметри з обмеженими частинами в загальному випадку просторових областей, що включають ці вузлові точки. Цей факт є дуже корисним, оскільки вивчення нев'язок такого рівняння дозволяє виявити ті підобласті, де збіжність розв'язків є повільною (або навпаки, швидкою) [5].

В ролі фундаментальних базисних функцій можна вибирати, наприклад, поліноміальні фундаментальні функції, тригонометричні фундаментальні функції, тригонометричні фундаментальні сплайни тощо [4]. Проте застосування кожного із перелічених класів функцій має свої особливості. Так в роботах [6-7] окремо розглядали випадки застосування тригонометричних фундаментальних многочленів та тригонометричних фундаментальних сплайнів. Розглянемо такі системи фундаментальних функцій більш детально та порівняємо відносні похибки наближених розв'язків, використовуючи окремо кожен із видів даних фунцій.

3. Фундаментальні тригонометричні многочлени

В першому випадку шуканий розв'язок наближається тригонометричними многочленами. Ці функції мають вигляд

$$t_k(t) = \frac{1}{N}\left[1 + 2\sum_{j=1}^{n} \cos j(t - t_k)\right]. \tag{5}$$

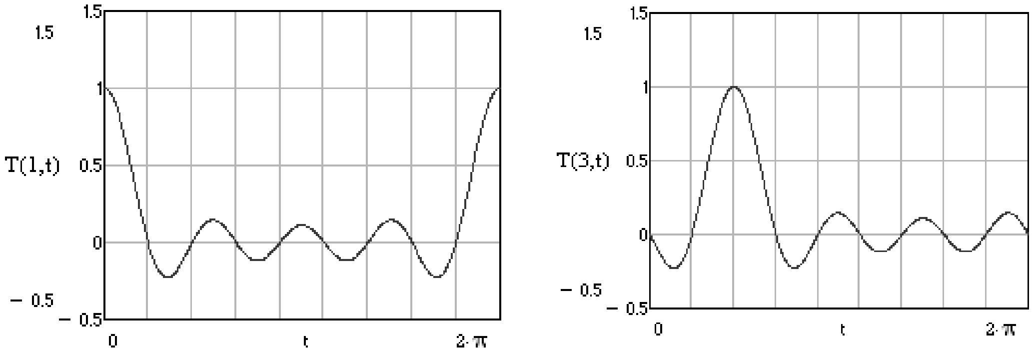

Рис.1 Фундаментальні на сітці Δ_N ($N = 9$) тригонометричні многочлени $t_1(t)$ та $t_3(t)$.

Fig. 1. Fundamental trigonometric polynomials $t_1(t)$ and $t_3(t)$ on a grid Δ_N ($N = 9$)

Система фундаментальних тригонометричних функцій, породжувана деякою сіткою Δ_N, є єдиною у тому розумінні, що існує лише єдина система тригонометричних многочленів порядку n, яка задовольняє на цій сітці

$$t_k(t_j) = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad (k, j = 1, \dots, N). \tag{6}$$

Використовуючи систему фундаментальних тригонометричних многочленів $t_k(t)$, $k = 1,..N$, наближений розв'язок будемо шукати у вигляді

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^{N} f_k t_k(t). \tag{7}$$

де f_k, ($k = 1, 2, \dots, 2n+1$) – невизначені параметри,які, як ми вже казали, являють собою значення наближеного шуканого розв'язку у вузлових точках t_k, ($k = 1, \dots, 2n+1$).

Підставляючи вирази (5), (7) в рівняння (1) з урахуванням крайових умов (2) та виразу (6), отримуємо таку систему рівнянь

$$\begin{gathered} f_1 = u_0; \\ \varepsilon(t_i) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, 2n; \\ f_{2n+1} = u_T. \end{gathered} \tag{8}$$

і розв'язуючи її, отримуємо наближений розв'язок.

4. Фундаментальні тригонометричні сплайни

В другому випадку шуканий розв’язок наближається фундаментальними тригонометричними сплайнами.

Функції системи фундаментальних тригонометричних сплайнів будемо позначати $tS_k(r,t)$. На відміну від фундаментальних тригонометричних многочленів $t_k(t)$, залежать ще і від параметра $r, r=1,2,...$; цей параметр визначає диференціальні властивості тригонометричних сплайнів. Так при будь якому значенні r $tS_k(r,t) \in C^{r-1}_{[0,2\pi]}$.

В роботі [8] досліджувався вплив диференціальних властивостей фундаментальних тригонометричних інтерполяційних сплайнів на похибку інтерполяції як на кінцях так і середині відрізку інтерполяції.

Ці функції мають вигляд

$$tS_k(r,t) = \frac{1}{N}\left\{1 + 2\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \alpha_j^{-1}(r)[C_j(r,t)\cos jt_k + S_j(r,t)\sin jt_k]\right\},$$

де $C_j\left(r,t\right) = \frac{\cos jt}{j^{r+1}} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\cos\left(mN+j\right)t}{\left(mN+j\right)^{r+1}} + \frac{\cos\left(mN-j\right)t}{\left(mN-j\right)^{r+1}}\right]$

$$S_j\left(r,t\right) = \frac{\sin jt}{j^{r+1}} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\left(mN+j\right)t}{\left(mN+j\right)^{r+1}} - \frac{\sin\left(mN-j\right)t}{\left(mN-j\right)^{r+1}}\right],$$

$$\alpha_j(r) = \frac{1}{j^{r+1}} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(mN+j\right)^{r+1}} + \frac{1}{\left(mN-j\right)^{r+1}}\right],$$

$j=1,2,...,n$, $k=1,...,N$, r - степінь сплайна.

Подання деяких фундаментальних тригонометричних сплайнів при різних значеннях параметра r наводяться на Рис. 2.

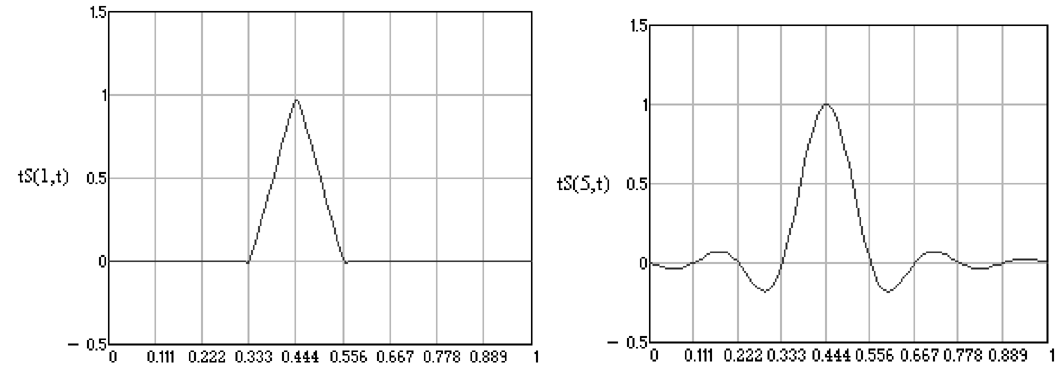

Рис.2 Фундаментальні тригонометричні сплайни при $r=1$ і $r=5$

Fig. 2. Fundamental trigonometric splines at $r=1$ and $r=5$

Легко бачити, що у тригонометричних фундаментальних сплайнів модулі максимумів спадають із віддаленням від вузла інтерполяції. Також для фундаментальних тригонометричних сплайнів при будь яких значеннях r виконується умова

$$\sum_{k=0}^{N} tS_k(r,t) = 1.$$

Певною вадою для фундаментальних тригонометричних сплайнів є їх періодичність. Проте, їх можна застосовувати і для подання неперіодичних функцій, застосовуючи при цьому спеціальні методи періодичного продовження [4].

Використовуючи систему фундаментальних тригонометричних сплайнів $tS_k(r,t)$, $r=1,2,...,$ $k=1,...,N$ наближений розв'язок будемо шукати у вигляді

$$S_n(t)=\sum_{k=1}^{N} f_k S_k(r,t) \qquad (9)$$

де f_k, ($k=1,2,...,2n+1$) – невизначені параметри,які також являють собою значення наближеного шуканого розвязку у вузлових точках t_k, ($k=1,...,2n+1$).

Для ілюстрації вищенаведеного розглядалась крайова задача

$$\begin{aligned} &y''+\left(\frac{3}{4}\right)^2 y=0 \\ &y(0)=0; y(2\pi-\alpha)=-1, \end{aligned} \qquad (10)$$

де α, $0<\alpha<2\pi$, - параметр стискання.

Параметр стискання виникає внаслідок того, що тригонометричний многочлен $T_n(t)$ (як і тригонометричний сплайн $S_k(r,t)$) в силу періодичності приймає однакові значення у точках 0 і 2π; отже, в загальному випадку не можна накладати крайові умови одночасно в цих точках.

Шукали наближений розв'язок задачі (10). При $n=4$; відповідно

$$\alpha=\frac{2\pi}{9};\ t_i=\frac{2\pi}{9}(i-1), i=1,...,9.$$

Нескладно переконатися, що точним розв'язком цієї задачі буде

$$y(t)=\sin\frac{3}{4}t.$$

Складаючи системи рівнянь типу (7) і розв'язуючи її, отримаємо наближений розв'язок $T_4(t)$ ($S_4(t)$). Графіки точного і наближеного розв'язків, а також графік відносної похибки для двох випадків наводяться на рис. 3, 4.

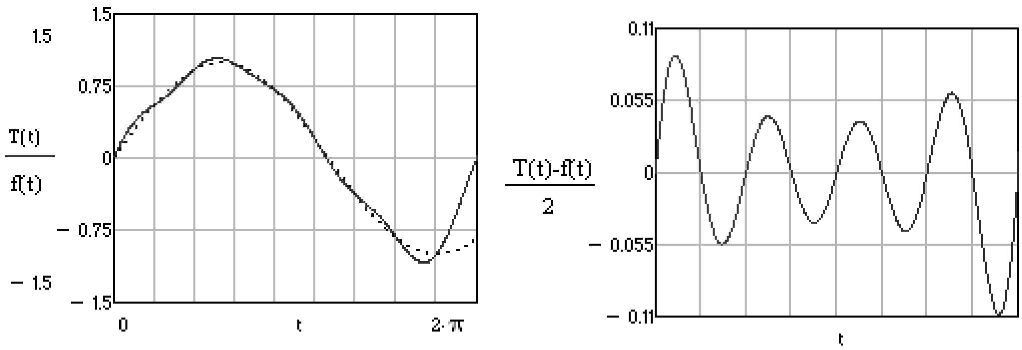

Рис. 3 Точний $f(t)$ і наближений $T_4(t)$ розв'язки та відносна похибка наближеного розв'язку на $\left[0,\frac{8}{9}2\pi\right]$

Fig. 3. Accurate $f(t)$ and approximate $T_4(t)$ solutions and relative error of the approximate solution on $\left[0,\frac{8}{9}2\pi\right]$

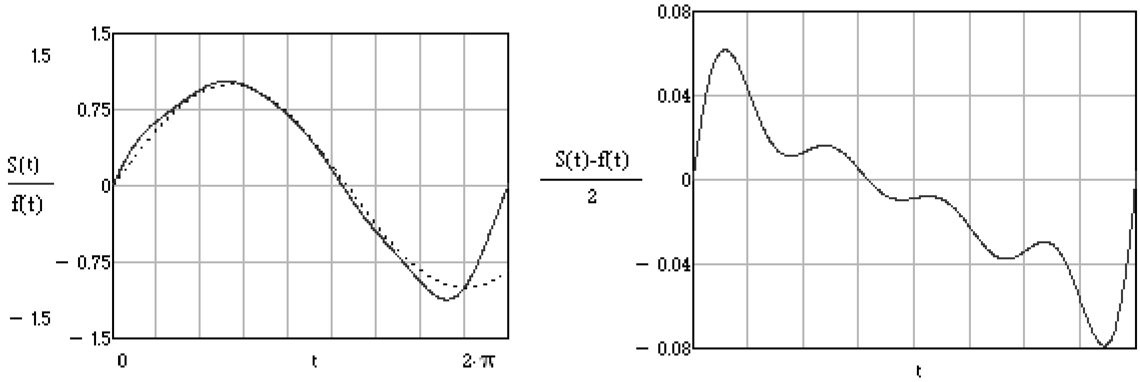

Рис. 4 Точний $f(t)$ і наближений $S_4(t)$ розв'язки та відносна похибка наближеного розв'язку на $\left[0, \frac{8}{9}2\pi\right]$.

Fg. 4. Accurate $f(t)$ and approximate $S_4(t)$ solutions and relative error of the approximate solution on $\left[0, \frac{8}{9}2\pi\right]$

Як бачимо з графіків відносна похибка при застосуванні фундаментальних тригонометричних сплайнів зменшилась у 1.4 рази.

Це пояснюється тим, що сплайни мають ряд переваг у порівнянні з многочленами. Серед цих переваг потрібно відзначити швидку збіжність, використання многочленів невисоких степенів і простоту реалізації алгоритмів побудови сплайнів на ЕОМ. Ці та деякі інші властивості сплайнів призвели до того, що останні поступово витісняють многочлени в багатьох галузях теоретичних і прикладних досліджень [1].

5. Висновки

Розглянуто деякі системи фундаментальних функцій, які зручно застосовувати в задачах побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь. Подання тригонометричних многочленів у вигляді (5) має істотну перевагу перед іншими формами подання, яка полягає в тому, що немає потреби обчислювати коефіцієнти тригонометричного многочлена. В свою чергу в ролі невизначених параметрів в (7) виступають значення наближеного шуканого розв'язку у вузлових точках t_j, ($j = 1, \dots, N$). Зрозуміло, що постановка задачі у термінах вузлових точок дозволяє асоціювати параметри з обмеженими частинами в загальному випадку просторових областей, що включають ці вузлові точки. Цей факт є дуже корисним, оскільки вивчення нев'язок такого рівняння дозволяє виявити ті підобласті, де збіжність розв'язків є повільною (або навпаки, швидкою) [1].

Фундаментальні тригонометричні сплайни мають ряд переваг у порівнянні з тригонометричими многочленами. До таких переваг слід віднести незмінність алгоритмів побудови тригонометричних сплайнів для різних значень параметра r та подання їх єдиним виразом (рівномірно збіжним тригонометричним рядом) на всьому інтервалі наближення. У склад фундаментальних тригонометричних сплайнів входить параметр r, який в свою чергу має великий вплив на похибку інтерполяції.

Список використаної літератури

1. Денисюк В.П. Сплайни та сигнали / В.П. Денисюк. – Київ, ЗАТ «ВІПОЛ», 2007. – 228с.

2. Денисюк В.П. Тригонометричні ряди та сплайни / В.П. Денисюк. – К.:НАУ, 2017. – 212с.

3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. — М.: Мир, 1986. – 318с.

4. Денисюк В.П. Фундаментальні функції та тригонометричні сплайни: Монографія / В.П. Денисюк. — К.: ПАТ «Віпол», 2015. – 296с.

5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. — М.: Мир, 1988. — 352 с.

6. Денисюк В.П., Рибачук Л.В., Негоденко О.В. Побудова наближених розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь у вигляді тригонометричних многочленів / В.П.Денисюк, Л.В. Рибачук, О.В. Негоденко // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. праць. – К: НАУ, 2014. – Випуск 1(45). – с. 37-42.

7. В.П. Денисюк, Негоденко О.В. Тригонометричні сплайни та їх застосування для розв'язання деяких задач небесної механіки / В.П.Денисюк, Л.В. Рибачук, О.В. Негоденко // Вісн. Астрон. школи. – К: НАУ, 2016. – Т.12, №1 – с. 62-66.

8. Денисюк В.П., Негоденко О.В. Вплив гладкості інтерполяційних тригонометричних сплайнів на похибку інтерполяції / В.П.Денисюк, О.В. Негоденко // Ukrainian Food Journal. 2013. Volume 2. Issue 4 http://www.ufj.ho.ua/

References

1. Denusiuk V. P. (2007). Splines and signals. Kyiv: VÌPOL (in Ukr.)
2. Denusiuk V. P. (2017). Trigonometric series and splines. Kyiv: NAU (in Ukr.)
3. Zenkevych O. Morgan K. (1986). Finite elements and approximation. Moscow: Nauka (in Rus.)
4. Denusiuk V. P. (2015). Fundamental functions and trigonometric splines. Kyiv: VÌPOL (in Ukr.)
5. Fletcher K. (1988). Numerical methods based on the Galerkin method. Moscow: Mur (in Rus.)
6. Denusiuk V.P., Rybachuk L. V., Nehodenko O. V. (2014). The construction of approximate solutions of boundary value problems for ordinary differential equations in the form of trigonometric polynomials. Problems of informatization and management, 1(45), 37-42.
7. Denusiuk V.P., Nehodenko O. V. (2016). Trigonometric splines and their applications for solving some problems of celestial mechanics. Visn.Astr.shkoly (Herald of the astronomical school), 12(1), 62-66.
8. Denusiuk, V.P. Nehodenko O.V., Influence of smoothness interpolation trigonometric splines on interpolation accuracy // Ukrainian Food Journal. 2013. Volume 2. Issue 4 http://www.ufj.ho.ua/

Summary. ***Denusiuk V., Nehodenko O. Mathematical models on the basis of fundamental trigonometric splines.*** *The paper considers some systems of fundamental functions which are easy to be used in the problems for ordinary differential equations. The most well-known systems of fundamental functions include Lagrange system of fundamental functions and the complete systems even and odd fundamental trigonometric polynomials. However, there are some other systems of fundamental functions on analytical grid, including the systems of polynomial fundamental splines and complete trigonometric even and odd fundamental splines. Some of these systems are considered in this paper.*

Keywords: funfamental functions, Lagrange functions, ordinary differential equations, simple polynomial splines, trigonometric splines, mathematical models.

Одержано редакцією 30.08.2017 Прийнято до друку 25.09.2017