УДК 517.51 + 511.7 PACS 02.30.-f

І. В. Замрій

СПОСІБ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЙ, ВИЗНАЧЕНИХ У ТЕРМІНАХ Q_3-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ТА ІНВАРІАНТАМИ У ЇХ ЗОБРАЖЕННІ

У роботі розглядається ефективний спосіб означення неперервних функцій f, визначених у термінах Q_3-зображення дробової частини дійсного числа (яке визначається ймовірнісним вектором (q_0, q_1, q_2) з додатними координатами і є узагальненням класичного трійкового зображення, оскільки співпадає з ним при $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$). А саме: функцій виду

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2...\gamma_n...},\ \text{де } \alpha_n, \gamma_n \in A_3,$$

$$\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} \equiv \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right]$$

і при цьому $\gamma_n = \gamma_n(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x))$, але $\gamma_n = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n = 1$.

Для нетривіального прикладу функції f знайдено еквівалентне означення.

Знайдено спосіб означити довільну функцію f, встановлено критерій існування нескінченних рівнів функції. Доведено, що при $q_0 \neq q_2$ всі неперервні функції з цього класу є кусково-сингулярними.

Ключові слова: неперервна функція, кусково-сингулярна функція, Q_3-зображення дійсних чисел, множина рівня функції, еквівалентне означення (спосіб задання), системи рівнянь.

1. Вступ

В останній час у конструктивній теорії неперервних функцій зі складними локальними властивостями широко використовуться різні системи зображення дійсних чисел як зі скінченним [1, 2], так і з нескінченним алфавітом [3]. Для їх теоретичного аналізу застосовуються як класичні (традиційні) засоби так і засоби метричної та ймовірнісної теорії чисел, ергодичної теорії, а також теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу) [4, 5]. При цьому плідними є ідеї самоподібності, самоафінності, автомодельності [1, 6, 7, 8] тощо.

У даній роботі ми розглядаємо неперервні функції, визначені за допомогою самоподібного Q_3-зображення (кодування) чисел відрізка $[0;1]$ і «зберігають цифру 1» [9], інтерес до яких виник на основі загального інтересу до функцій зі «складною» локальною структурою та неоднорідною поведінкою, зокрема сингулярних функцій [4, 10] (неперервних функцій, похідна яких майже скрізь у розумінні міри Лебега дорівнює нулю).

Існує чимало робіт пов'язаних з сингулярними функціями [1-4, 6, 8, 10] і не існує загального способу їх задання. Для кожної функції та системи кодування це індивідуально. Як у XX ст. [4, 10] так і у XXI ст. [3, 6, 8, 11] дослідники прагнули знайти максимально ефективне означення, використовуючи при цьому описовий метод, функціональні рівняння, системи рівнянь та інше. При дослідженні неперервних функцій, які визначені за допомогою інваріанта (цифри 1) у Q_3-зображенні чисел, ми також стикнулися з проблемою: як достатньо просто означити функції з цієї множини, не описуючи кожну цифру значення функції? Тому дана робота присвячена вирішенню цієї проблеми.

2. Основні поняття

Нехай $A_3 = \{0,1,2\}$ — алфавіт, $L = A_3 \times A_3 \times A_3 \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту, $Q_3 = \{q_0, q_1, q_2\}$ — фіксована множина додатних дійсних чисел, причому $q_0 + q_1 + q_2 = 1$.

Відомо [1], що для довільного $x \in [0,1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right] \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{1}$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$.

Ряд $\beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right]$ називається Q_3-представленням числа x, а скорочений запис $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — його Q_3-зображенням. Період у Q_3-зображенні числа (якщо він існує) позначають у круглих дужках. Існують числа, які мають два Q_3-зображення. Це числа з періодом (0) або (2), причому $\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)} = \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1](2)}$. Вони називаються *$Q_3$-раціональними*, їх множина є зліченною. Решту чисел називають *Q_3-ірраціональними*.

Зазначимо, що при $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$ Q_3-зображення є класичним трійковим.

Означення 1. *Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ – фіксований впорядкований набір чисел з $\{0,1,2\}$. Циліндром рангу k з основою $c_1c_2\ldots c_k$ називається множина $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_k}$ всіх чисел $x \in [0;1]$, які мають наступне Q_3-зображення*

$$x = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_k\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+m}\ldots}, \alpha_{k+i} \in A.$$

Безпосередньо з даного означення випливають наступні властивості циліндрів:

1) $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup_{i \in A_3} \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m i}$;

2) $[0;1] = \Delta = \bigcup_{i_1 \in A_3}\bigcup_{i_2 \in A_3} \ldots \bigcup_{i_n \in A_3} \Delta^{Q_3}_{i_1 i_2\ldots i_n}$ для довільного n;

3) $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m} = [a,b]$, де $a = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m(0)} = \beta_{c_1} + \sum_{k=2}^{m}(\beta_{c_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j})$, $b = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m(2)} = a + \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}$;

4) $|\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}| = \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}$.

Внутрішність циліндра позначають $\nabla^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_k}$.

Розглядаються неперервні на відрізку $[0;1]$ функції f, визначені рівністю

$$y = f(x) = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots},$$

де цифра γ_n Q_3-зображення числа y задовольняє умови:

1) $\gamma_n = 1 \Leftrightarrow \alpha_n = 1$;

2) якщо цифра γ_n відмінна від 1, то вона залежить від перших n цифр Q_3-зображення аргумента x, тобто

$$\gamma_n = \gamma_n(x) = \phi_n(\alpha_1(x),\ldots,\alpha_n(x)),\ \ n \in N.$$

Означення 2. *Якщо у Q_3-зображенні аргумента $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і Q_3-зображенні значення функції*

$$y = f(x) = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots} \tag{2}$$

цифра 1 знаходиться на тих самих місцях, тобто $\gamma_n = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n = 1$, то казатимемо, що функція f зберігає цифру 1 у Q_3-зображенні чисел відрізка $[0;1]$.

Позначимо через P_c — множину всіх неперервних функцій f, що зберігають цифру 1 у Q_3-зображенні чисел відрізка $[0;1]$.

Спочатку розглянемо нетривіальний приклад функції $f \in P_c$ та як для нього можна вирішити проблему компактного задання.

3. Еквівалентне означення нетривіальної функції f з одним нескінченним рівнем

Розглянемо функцію $y = f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$.

Покладемо $\gamma_1 = 0$ при $\alpha_1 \neq 1$ і $f_1(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = f_1(\Delta^{Q_3}_{(2)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)} = \dfrac{q_0(1-q_2)}{1-q_0q_2}.$

Уточнимо довизначення решти цифр $\gamma_n = \phi_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ числа $y = f_1(x)$.

1. Якщо зображення числа починається цифрою 1, то для всіх $n > m$, де $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 1$, але $\alpha_{m+1} \neq 1$, $\gamma_n = \begin{cases} \alpha_n & ,\textit{якщо}\ \ \alpha_{m+1} = 0, \\ 2-\alpha_n & ,\textit{якщо}\ \ \alpha_{m+1} = 2, n \in N. \end{cases}$

2. Якщо зображення числа починається цифрою 0 і $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, але $\alpha_{m+1} \neq 0$, то при $\alpha_{m+1} = 2$ та всіх $j \in \mathbb{N}$

$$\gamma_{m+j} = \begin{cases} \alpha_{m+j} & ,\ \textit{коли}\ m - \textit{непарне}, \\ 2-\alpha_{m+j} & ,\ \textit{коли}\ m - \textit{парне}, \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_3 = \ldots = \gamma_{2k-1} = 0, \\ \gamma_2 = \gamma_4 = \ldots = \gamma_{2k-2} = 2, \end{cases}$$

де $2k-1 \leq m < 2k+1$.

Якщо ж $\alpha_{m+1} = 1 = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_{m+r}$, але $\alpha_{m+r+1} \neq 1$, то

$$\gamma_{m+r+j} = \begin{cases} \alpha_{m+r+j} & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_{m+r+1} = 0 \text{ і } m = 2k, \\ \alpha_{m+r+1} = 2 \text{ і } m = 2k+1, \end{array}\right. \\ 2-\alpha_{m+r+j} & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_{m+r+1} = 0 \text{ і } m = 2k+1, \\ \alpha_{m+r+1} = 2 \text{ і } m = 2k. \end{array}\right. \end{cases}$$

3. Якщо зображення числа починається цифрою 2 і $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 2$, але $\alpha_{m+1} \neq 2$, то при $\alpha_{m+1} = 0$ та всіх $j \in \mathbb{N}$ маємо $\gamma_{m+j} = \begin{cases} \alpha_{m+j} & ,\ \textit{коли}\ m - \textit{парне}, \\ 2-\alpha_{m+j} & ,\ \textit{коли}\ m - \textit{непарне}. \end{cases}$

Якщо ж $\alpha_{m+1} = 1 = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_{m+r}$, але $\alpha_{m+r+1} \neq 1$, то

$$\gamma_{m+r+j}=\begin{cases}\alpha_{m+r+j} & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha_{m+r+1}=0 \text{ і } m=2k,\\ \alpha_{m+r+1}=2 \text{ і } m=2k+1,\end{array}\right.\\ 2-\alpha_{m+r+j} & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha_{m+r+1}=0 \text{ і } m=2k+1,\\ \alpha_{m+r+1}=2 \text{ і } m=2k.\end{array}\right.\end{cases}$$

Очевидно, що умова $\gamma_n=1\Leftrightarrow\alpha_n=1$ виконується, тому f_1 є функцією, яка зберігає цифру 1 у Q_3-зображенні чисел.

Теорема 1. *Функціональне рівняння*

$$f(x)=f(I(x)), x\in[0;1],$$

де $I(x)=I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}$ *— інверсор цифр [8], у класі функцій* P_c *має безліч розв'язків.*

Доведення. Нехай k – довільне натуральне число, тоді функція

$$f(x)=\begin{cases}\sigma_1(x), & \textit{якщо} \quad x\in\left[0;\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)}\right],\\ x, & \textit{якщо} \quad x\in\left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)};\Delta^{Q_3}_{(1)}\right],\\ I(x), & \textit{якщо} \quad \left[\Delta^{Q_3}_{(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}\right],\\ \sigma_2(x), & \textit{якщо} \quad \left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)};1\right],\end{cases}$$

де $\sigma_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots}$, $\sigma_2(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots})=\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_k]\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}$.

Нехай x належить першому проміжку, тоді $x=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}$.

$$f(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}))=f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots})=\sigma_2(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots}))=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots},$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots})=\sigma_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots}.$$

Якщо $x\in[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)};\Delta^{Q_3}_{(1)}]$, то $x=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{l}\alpha_{l+1}\ldots\alpha_{l+t}\ldots}$, де $l<k$ або $x=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p-1}0\alpha_{p+1}\ldots\alpha_{p+t}\ldots}$ і

$f(x)=x$, а $f(I(x))=f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{l}[2-\alpha_{l+1}]\ldots[2-\alpha_{l+t}]\ldots})=I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{l}[2-\alpha_{l+1}]\ldots[2-\alpha_{l+t}]\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{l}\alpha_{l+1}\ldots\alpha_{l+t}\ldots}=x,$

$$f(I(x))=f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p-1}2[2-\alpha_{p+1}]\ldots[2-\alpha_{p+t}]\ldots})=I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p-1}2[2-\alpha_{p+1}]\ldots[2-\alpha_{p+t}]\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p-1}0\alpha_{p+1}\ldots\alpha_{p+t}\ldots}=x.$$

Нехай $x\in[\Delta^{Q_3}_{(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}]$, тоді $x=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{l}\alpha_{l+1}\ldots\alpha_{l+t}\ldots}$, де $l<k$ або $x=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p}2\alpha_{p+2}\ldots\alpha_{p+t}\ldots}$ і $f(x)=I(x)$. З іншого боку

$$f(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{l}\alpha_{l+1}\ldots\alpha_{l+t}\ldots}))=f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{l}[2-\alpha_{l+1}]\ldots[2-\alpha_{l+t}]\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{l}[2-\alpha_{l+1}]\ldots[2-\alpha_{l+t}]\ldots}=I(x),$$

$$f(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p}2\alpha_{p+2}\ldots\alpha_{p+t}\ldots}))=f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p}0[2-\alpha_{p+2}]\ldots[2-\alpha_{p+t}]\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p}0[2-\alpha_{p+2}]\ldots[2-\alpha_{p+t}]\ldots}=I(x).$$

Для $x\in[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)};1]$, очевидно, що $x=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}$ і відповідно

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}) = \sigma_2(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots},$$

$$f(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots})) = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots}) = \sigma_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}.$$

Отже, f є розв'язком функціонального рівняння $f(x) = f(I(x))$.

Оскільки k – довільне натуральне число, то очевидно, що дане функціональне рівняння має безліч розв'язків. □

Зауваження 1. *Функція σ_1 має аналітичний вираз $\sigma_1(x) = q_0^k I\left(\dfrac{x}{q_0^k}\right)$.*

Зауваження 2. *Функція σ_2 є лінійною на циліндрах k-го рангу, причому*

$$\sigma_2(x) = \frac{D}{D_0}(x - B) + A,$$

де $D = \prod_{j=1}^{k} q_{[2-\alpha_j]}$, $D_0 = \prod_{j=1}^{k} q_{\alpha_j}$, $B = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}$,

$A = \beta_{[2-\alpha_1]} + \ldots + \beta_{[2-\alpha_k]} \prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]}$.

Теорема 2. *У класі P_c функціональне рівняння*

$$f(x) = f(I(x)), x \in [0;1], \tag{3}$$

при умові

$$f(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)} \tag{4}$$

має єдиний розв'язок — функцію f.

Доведення. Графік кожної функції, яка зберігає цифру 1 у Q_3-зображенні чисел, проходить через точку $M_0(\Delta^{Q_3}_{(1)}; \Delta^{Q_3}_{(1)})$. Якщо $f \in P_c$ і виконується умова (4), то

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)}) = \begin{cases} \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{k}(1)} & при \quad k = 2m, \\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{k}(1)} & при \quad k = 2m+1. \end{cases}$$

В силу рівності (3) достатньо показати, що функція f, яка задовольняє умови теореми, однозначно визначена на відрізку $[0; \Delta^{Q_3}_{(1)}]$. Для цього покажемо, що функція f однозначно визначається на кожному з відрізків виду $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}(1)}]$, $k \in N$. Більше того, вона є лінійною, коли k — непарне, і $f(x) = q_0^{\frac{k}{2}} q_2^{\frac{k-2}{2}} I\left(\dfrac{x}{q_0^{k-1}}\right) + \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{k-2}(0)}$, коли k — парне.

Нехай $k = 1$. Оскільки (4), то $\phi_1(0) = 0$. Тоді $f(\Delta^{Q_3}_{0(1)}) = \Delta^{Q_3}_{0(1)}$.

Із-за неперервності функції $\phi_2(0,2) = 2$ і $\phi_2(1,0) = 0$. Тому очевидно, що $f(\Delta^{Q_3}_{02(1)}) = \Delta^{Q_3}_{02(1)}$ і $f(\Delta^{Q_3}_{10(1)}) = \Delta^{Q_3}_{10(1)}$.

Враховуючи неперервність функції, маємо $\phi_3(0,2,0) = 0, \phi_3(0,2,2) = 2$ і тому $f(\Delta^{Q_3}_{020(1)}) = \Delta^{Q_3}_{020(1)}$, $f(\Delta^{Q_3}_{022(1)}) = \Delta^{Q_3}_{022(1)}$. Крім того $\phi_3(1,0,0) = 0$, $\phi_3(1,0,2) = 2$ і $f(\Delta^{Q_3}_{100(1)}) = \Delta^{Q_3}_{100(1)}$, $f(\Delta^{Q_3}_{102(1)}) = \Delta^{Q_3}_{102(1)}$ і т.д.

Із-за неперервності функції і того, що вона зберігає цифру 1 у Q_3-зображенні чисел, кожна з точок $\Delta^{Q_3}_{10c_3\ldots c_n(1)}$, $\Delta^{Q_3}_{02c_3\ldots c_n(1)}$, $\Delta^{Q_3}_{0\underbrace{1\ldots1}_{t}2c_{t+3}\ldots c_{t+n}(1)}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{t}0c_{t+2}\ldots c_{t+n}(1)}$ є інваріантиними при довільних $n,t\in N$, $j\in\{1,2\}$, $c_i\in A_3$. Оскільки ж множина таких точок є всюди щільною, то $f(x)=x$ при $x\in[\Delta^{Q_3}_{0(1)};\Delta^{Q_3}_{(1)}]$.

Нехай $k=2$. З умови (4) випливає, що $f(\Delta^{Q_3}_{00(1)})=\Delta^{Q_3}_{02(1)}$ і цифри $\phi_3(0,0,2)=0$, $\phi_3(0,1,0)=2$ однозначно визначаються, за рахунок неперервності, тоді: $f(\Delta^{Q_3}_{002(1)})=\Delta^{Q_3}_{020(1)}$ і $f(\Delta^{Q_3}_{010(1)})=\Delta^{Q_3}_{012(1)}$.

Оскільки $f\in P_c$, то має місце

$$f(\Delta^{Q_3}_{002\alpha_4\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{020[2-\alpha_4]\ldots[2-\alpha_n]\ldots},\ f(\Delta^{Q_3}_{010\alpha_4\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{012[2-\alpha_4]\ldots[2-\alpha_n]\ldots},$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{00\underbrace{1\ldots1}_{k}2\alpha_{k+4}\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{02\underbrace{1\ldots1}_{k}0[2-\alpha_{k+4}]\ldots[2-\alpha_n]\ldots},\ f(\Delta^{Q_3}_{0\underbrace{1\ldots1}_{k}0\alpha_{k+3}\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{0\underbrace{1\ldots1}_{k}2[2-\alpha_{k+3}]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}$$

для всіх $\alpha_i\in A_3,\ k,n\in N$.

Тобто, для $x\in[\Delta^{Q_3}_{00(1)};\Delta^{Q_3}_{0(1)}]$

$$f(\Delta^{Q_3}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{0[2-\alpha_2][2-\alpha_3]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}=\beta_0+q_0\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_2][2-\alpha_3]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

З іншого боку $x=\Delta^{Q_3}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}=\beta_0+q_0\Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, тобто $\Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}=\dfrac{x}{q_0}$. Тоді

$$I\left(\frac{x}{q_0}\right)=I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_2][2-\alpha_3]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

Таким чином $f(x)=q_0 I\left(\dfrac{x}{q_0}\right)+\Delta^{Q_3}_{(0)}$.

Припустимо, що наші міркування справедливі при $k=2m.$ Тобто, для всіх $x\in[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-1}(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-2}(1)}]$ функція f — лінійна, отже її можна подати у вигляді

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-2}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots})=a\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-2}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}+b,$$

де $a>0$, a,b — дійсні числа. А на відрізку $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-1}(1)}]$ має місце рівність

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-1}\alpha_{2m}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots})=q_0^m q_2^{m-1} I\left(\frac{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-1}\alpha_{2m}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}}{q_0^{2m-1}}\right)+\Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2m-2}(0)}.$$

Перевіримо, чи виконується вище сказане при $k=2m+1$ та $k=2m+2$.

Нехай $k=2m+1$, тоді $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\alpha_{2m+1}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots})=\beta_0+\beta_2q_0+q_0q_2 f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-2}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots})$.

Застосувавши припущення, отримаємо

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\alpha_{2m+1}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots})=q_0q_2a\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-2}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}+(b+q_0(q_0+q_1)).$$

Не порушуючи загальності, виконаємо перетворення

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\alpha_{2m+1}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots})=\frac{aq_2}{q_0}(\beta_0+\beta_0q_0+q_0^2\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-2}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots})+(b+q_0(q_0+q_1))=$$

$$=\frac{aq_2}{q_0}\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{2m}\alpha_{2m+1}...\alpha_{2m+n+2}...}+(b+q_0(q_0+q_1)).$$

Тобто, $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{2m}\alpha_{2m+1}...\alpha_{2m+n+2}...})=a_*\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{2m}\alpha_{2m+1}...\alpha_{2m+n+2}...}+b_*$, де $a_*=\frac{aq_2}{q_0}$ і $b_*=(b+q_0(q_0+q_1))$ — дійсні числа, бо q_i — додатні дійсні.

Нехай $k=2m+2$. Тоді $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{2m+1}\alpha_{2m+2}...\alpha_{2m+n+2}...})=\beta_0+\beta_2 q_0+q_0q_2 f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{2m-1}\alpha_{2m}...\alpha_{2m+n}...})$. Застосуємо припущення для $k=2m$, отримаємо

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{2m+1}\alpha_{2m+2}...\alpha_{2m+n+2}...})=\beta_0+\beta_2q_0+q_0q_2q_0^m q_2^{m-1}I\left(\frac{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{2m-1}\alpha_{2m}...\alpha_{2m+n}...}}{q_0^{2m-1}}\right)+\Delta^{Q_3}_{\underbrace{02...02}_{2m-2}(0)}.$$

Тоді $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{2m+1}\alpha_{2m+2}...\alpha_{2m+n+2}...})=q_0^{m+1}q_2^m I\left(\frac{\beta_0+\beta_0q_0+q_0^2\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{2m-1}\alpha_{2m}...\alpha_{2m+n}...}}{q_0^{2m+1}}\right)+\Delta^{Q_3}_{\underbrace{02...02}_{2m}(0)}$,

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{2m+1}\alpha_{2m+2}...\alpha_{2m+n+2}...})=q_0^{m+1}q_2^m I\left(\frac{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{2m+1}\alpha_{2m}...\alpha_{2m+n}...}}{q_0^{2m+1}}\right)+\Delta^{Q_3}_{\underbrace{02...02}_{2m}(0)}.$$

Отже, рівності справедливі при $k=2m+1$ та $k=2m+2$.

Таким чином, використавши метод математичної індукції, ми довели, що функція, яка задовольняє умови теореми однозначно визначається на кожному з відрізків $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{k}(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0...0}_{k-1}(1)}]$, $k\in N$ та вказали проміжки зростання і спадання функції.

В силу однозначності визначення очевидно, що функціональне рівняння (3) для всіх $x\in[0;1]$ при початковій умові (4) в класі P_c має єдиний розв'язок, причому це — функція f_1.□

Наслідок 1. *Умова* $f(\Delta^{Q_3}_{(0)})=\Delta^{Q_3}_{(02)}$ *однозначно визначає, що функція* f *має один нескінченний рівень (множина* $f^{-1}(y_0)=\{x:f(x)=y_0\}$ *називається множиною рівня* y_0 *функції* f*), а саме,* $y_0=\Delta^{Q_3}_{(02)}$.

4. Спосіб означення неперервних функцій f, що зберігають цифру 1 у Q_3-зображенні чисел

Очевидно, що не всі функції f, що зберігають цифру 1 у Q_3-зображенні чисел, є розв'язками функціональних рівнянь чи їх графіки мають якісь симетрії, тому виникає проблема компактного та єфективного означення довільної функції з P_c.

Теорема 3. *Кожна неперервна функція* $f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...})=\Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2...\gamma_k...}$, *що зберігає цифру 1 (без примноження) у* Q_3*-зображенні чисел відрізка* $[0;1]$, *визначається системою*

$$f(x)=\begin{cases} a_k\cdot I(\frac{x}{a'})+b_k & \text{при} \quad x\in\Delta^{Q_3}_{c_1c_2...c_k},\\ c_k\cdot x+d_k & \text{при} \quad x\in\Delta^{Q_3}_{c'_1c'_2...c'_k},\end{cases}$$

де

$$\nabla^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_k} \neq \nabla^{Q_3}_{c'_1c'_2\ldots c'_k},\ a'_k = \prod_{i=1}^{k} q_{\alpha_i},\ a_k = \prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j},\ b_k = \beta_{\gamma_1} + \sum_{t=2}^{k}(\beta_{\gamma_t}\prod_{j=1}^{t-1} q_{\gamma_j}),\ c_k = \frac{\prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j}}{\prod_{i=1}^{k} q_{\alpha_i}},$$

$$d_k = \beta_{\gamma_1} + \sum_{t=2}^{k}(\beta_{\gamma_t}\prod_{j=1}^{t-1} q_{\gamma_j}) - \frac{\prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j}}{\prod_{i=1}^{k} q_{\alpha_i}}(\beta_{\alpha_1} + \sum_{t=2}^{k}(\beta_{\alpha_t}\prod_{i=1}^{t-1} q_{\alpha_i})),\ k \in N.$$

Причому, якщо функція має один або два нескінченні рівні, то для неї має місце рівність

$$f(\Delta^{Q_3}_{(i)}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n(i[2-i])}\ \textit{при}\quad i, \gamma_j \in \{0, 2\}.$$

Крім того, якщо $q_0 \neq q_2$, *то функція* f *є сингулярною на відрізках, де вона визначається* $f(x) = a_k \cdot I(\frac{x}{a'_k}) + b_k$.

Доведення. Перша цифра γ_1 функції $y = f(x)$ однозначного визначається рівностями:

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0 & \textit{при}\quad \alpha_1 = 0, \\ 2 & \textit{при}\quad \alpha_1 = 2; \end{cases} \gamma_1 = \begin{cases} 2 & \textit{при}\quad \alpha_1 = 0, \\ 0 & \textit{при}\quad \alpha_1 = 2; \end{cases} \gamma_1 = \begin{cases} 0 & \textit{при}\quad \alpha_1 = 0, \\ 0 & \textit{при}\quad \alpha_1 = 2; \end{cases}$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} 2 & \textit{при}\quad \alpha_1 = 0, \\ 2 & \textit{при}\quad \alpha_1 = 2. \end{cases}$$

Визначивши однозначно цифру γ_1 існує лише чотири можливості для однозначного довизначення цифри γ_2. А це значення для двох пар $(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$ і $(\alpha_1, \alpha_2) = (2,2)$, оскільки для решти пар однозначний вибір цифри γ_2 диктується неперервністю.

Здійснивши однозначний вибір цифри γ_2, для однозначного визначення цифри γ_3 існує чотири варіанти. Вони дозволяють вільно вибрати значення для наборів $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$ і $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2,2,2)$, а для решти вони диктуються неперервністю і т.д.

Тобто, здійснивши однозначний вибір цифри γ_{k-1} неоднозначними залишаються набори $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) = (0,0,...,0)$ і $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) = (2,2,...,2)$, а це означає, що функція однозначно визначається на всіх циліндричних множинах k-го рангу, окрім циліндрів $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}}$ та $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}}$. В силу неперервності функції $y = f(x)$ очевидно, що на циліндричних множинах $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_k}$ k-го рангу, де вона однозначно визначається, є або лінійною або інверсною (подібною до інверсора цифр Q_3-зображення чисел). Тоді існують такі числа $a'_k, a_k, b_k, c_k, d_k \in R$, що на кожному з циліндрів функція буде визначатися або $a_k \cdot I(\frac{x}{a'_k}) + b_k$ або $c_k \cdot x + d_k$, де зважаючи на вище сказане та перші k цифр аргументу $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ й значення фукції $f(x) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k\ldots}$, очевидно, що

$$a'_k = \prod_{i=1}^{k} q_{\alpha_i}, a_k = \prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j}, b_k = \beta_{\gamma_1} + \sum_{t=2}^{k} (\beta_{\gamma_t} \prod_{j=1}^{t-1} q_{\gamma_j}), \quad c_k = \frac{\prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j}}{\prod_{i=1}^{k} q_{\alpha_i}},$$

$$d_k = \beta_{\gamma_1} + \sum_{t=2}^{k} (\beta_{\gamma_t} \prod_{j=1}^{t-1} q_{\gamma_j}) - \frac{\prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j}}{\prod_{i=1}^{k} q_{\alpha_i}} (\beta_{\alpha_1} + \sum_{t=2}^{k} (\beta_{\alpha_t} \prod_{i=1}^{t-1} q_{\alpha_i})).$$

Причому, якщо всі рівні функції $y = f(x)$ скінченні, то знайдеться таке k, що всі цифри функції однозначно визначаться і для наборів $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) = (0, 0, ..., 0)$, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) = (2, 2, ..., 2)$.

Якщо ж функція має хоча б один нескінченний рівень, то для одного з наборів (якщо функція має один нескінченний рівень) або одночасно для двох (якщо функція має два нескінченні рівні) $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, ...) = (0, 0, ..., 0, ...)$ та $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, ...) = (2, 2, ..., 2, ...)$ починаючи з деякого k цифри γ_k, γ_{k+1}, ..., γ_{k+n}, ... однозначно визначаться і в силу неперервності та означення функції, що зберігає цифру 1 у Q_3-зображенні чисел, дорівнюватимуть i, $2-i$, i, $2-i$, ..., i, $2-i$, ..., де $i \in \{0, 2\}$. Тобто,

$$f(\Delta^{Q_3}_{(i)}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n (i[2-i])} \textit{ при } \quad i, \gamma_j \in \{0, 2\}.$$

Доведемо останню частину теореми.

Якщо на деяких циліндричних множинах $\Delta^{Q_3}_{c_1 c_2 ... c_k}$ функція визначається $a_k \cdot I(\frac{x}{a'_k}) + b_k$, де $I(x)$ — інверсор цифр Q_3-зображення чисел відрізка $[0;1]$, властивості якого досліджено у роботі [8], то очевидно, що і $a_k \cdot I(\frac{x}{a'_k}) + b_k$ володіє аналогічними властивостями. Оскільки функція $I(x)$ сингулярна при $q_0 \neq q_2$, то $a_k \cdot I(\frac{x}{a'_k}) + b_k$ також сингулярна при $q_0 \neq q_2$.

5. Висновки

Використовуючи теорему 3, кожну функцію з класу P_c можна означити системою рівнянь, яка значно спрощує їх дослідження. У роботі також доведено, що при $q_0 \neq q_2$ функції $f \in P_c$ є кусково-сингулярними та вказується критерій існування нескінченних рівнів.

Список використаної літератури:

1. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

2. Турбин А. Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. — К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.

3. Albeverio S. On one class of functions related to Ostrogradsky series and containing singular and nowhere monotonic functions / S. Albeverio, O. Baranovskyi, Yu. Kondratiev,

M. Pratsiovytyi // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2013. – № 15. – С. 35–55.

4. Billingsley P. The singular function on bold play / P. Billingsley. – Am. Sci. – 1983. – 71. – P. 392–397.

5. Peter R. Massopust. Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets / by Peter R. Massopust. — Academic Press; 1 edition (January 18, 1995), 383 p.

6. Працьовитий М. В. Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням дійсних чисел / М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков // Укр. Мат. Жур. — 2013. — Т. 65, №3. — С. 405-417.

7. Pratsiovytyi M. Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation / M. Pratsiovytyi, N. Vasylenko // Int. Journal of Math. Analysis, Vol.7, 2013. — №64. — P. 3155 - 3169.

8. Замрій І. В. Сингулярність інверсора цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості / І. В. Замрій, М. В. Працьовитий // *Нелінійні коливання (ISSN 1562-3076).* — **18**, 1. — Інститут математики НАН України. — 2015 р. — С. 55-70.

9. Замрій І. В. Неперервні функції, які зберігають цифру 1 Q_3-зображення числа / М. В. Працьовитий, І. В. Замрій // *Буковинський математичний журнал.* — **3**, 3-4. — Чернівці: Чернівецький національний університет, 2015. — С. 142-159.

10. Salem R. On some singular monotonic function which are strictly increasing / R. Salem // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol.53, no.3. — P. 427-439.

11. Осауленко Р. Ю. Група неперервних перетворень відрізка $[0;1]$, які зберігають частоти цифр Q_s-зображення числа / Р. Ю. Осауленко // Збірник праць Інституту математики НАН України. Т. 13, № 3. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2016. — С. 191-204.

References

1. Pratsiovytyi M. V. (1998). *Fractal Approach in Studies of Singular Distributions.* Kyiv: View of the NPU named after M. P. Dragomanov (in ukrainian).

2. Turbin A. F., Pratsiovytyi M. V. (1992). *Fractal sets, functions, distributions.* K.: Naukova dumka (in russian).

3. Albeverio S., Baranovskyi O., Kondratiev Yu., Pratsiovytyi M. (2013). On one class of functions related to Ostrogradsky series and containing singular and nowhere monotonic functions. *Scientific journal NPU of N. P. Drahomanov. Series 1. Physics and mathematics*, № 15, 35-55.

4. Billingsley P. (1983). The singular function on bold play. *Am. Sci.*, 71., 392-397.

5. Peter R. Massopust. (1995). Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets. *Academic Press; 1 edition*, 383.

6. Pratsiovytyi M. V., Kalashnikov A. V. (2013). Self-infinitive singular and nowhere monotonic functions associated with the image of real numbers. *Ukr. Mate. Journ,* 65(3), 405-417 (in ukrainian).

7. Pratsiovytyi M., Vasylenko N. (2013). Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation. *Int. Journal of Math. Analysis*, 7(64), 3155-3169.

8. Zamrii I. V., Pratsiovytyi M. V. (2015). Signularity of invertor the digitizer Q_3-representation of the fractional part of the real number, its fractal and integral. *Nonlinear oscillations (ISSN 1562-3076),* **18**(1), 55-70 (in ukrainian).

9. Pratsiovytyi M. V., Zamrii I. V. (2015). Continuous functions preserving digit 1 in the Q_3-representation of number. *Bukovinsky Mathematical Journal,* **3**(3-4), 142-159 (in ukrainian).

10. Salem R. (1943). On some singular monotonic function which are strictly increasing. *Trans. Amer. Math. Soc,* 53(3), 427-439.

11. Osaulenko R. Yu. (2016). A group of continuous transformations of a segment that preserves the frequency of digits -the image of a number. *Collected Works of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine*, **13**(3), 191-204 (in ukrainian).

Summary. ***Zamrii I. V. A method for specifying functions defined in terms of the Q_3-representation of real numbers and invariants in their representation.*** *There are a number of problems associated with functions, one of which is the problem of effective ways of their assignment and research. Recently, for this purpose, different systems of representations of real numbers are used with both finite and infinite alphabets, one of which is Q-representation numbers, first introduced in 1986 by M. V. Pratsiovytyi. It was used to study singular, non-differentiable, non-monotonic distribution functions. We use Q-representation of numbers for the specification and study of non-monotonic piecewise singular functions defined by invariants in their representation.*

In this paper, we consider continuous functions f that store the number 1 (without multiplication) in Q_3-representation the real numbers of the segment $[0;1]$. The latter is determined by the probabilistic vector (q_0, q_1, q_2) with positive coordinates and is a generalization of the classical triple representation: $x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \alpha_k(x) \equiv \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, where $\alpha_n(x) \in A_3 \equiv \{0,1,2\}$. In other words, we consider the functions of the form

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}, \text{ where } \alpha_n, \gamma_n \in A_3,$$

$$\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \equiv \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right]$$

and thus $\gamma_n = \gamma_n(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$, but $\gamma_n = 1$ if and only if $\alpha_n = 1$. And another problem is solved – an effective definition of such functions, both for the compactness of their task and for the convenience of the study.

For a non trivial example of continuous functions that stores a digit 1 in Q_3-representation, and has one infinite level, an equivalent definition is found, namely, for the function f, which is solution to the system of equations in the class of continuous functions

$$\begin{cases} f(x) = f(I(x)), \\ f(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)}. \end{cases}$$

It is proposed a method for identifying an arbitrary continuous function f, which stores a digit 1 (without multiplication) in Q_3-representation.

It is proved that for $q_0 \neq q_2$ all continuous functions f are piecewise singular, that is, they are distinct from constant continuous functions of bounded variation, the derivative of which is almost zero (in the sense of Lebesgue measure).

Keywords: Q_3-representation of real numbers, continuous function, lump-singular function, equivalent to the definition (method of assignment), set of function level, system of equations.

Одержано редакцією 20.10.2017 Прийнято до друку 05.12.2017