ORCID: 0000-0003-2297-1062

С. Т. Акопян

Магістрантка, Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна

ORCID: 0000-0001-8427-2852

Ю.С. Кудрич

Асистент,

Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна,

uliakudrych1994@gmail.com

УДК 517.94 PACS 02,03,05,06,07

DOI: 10.31651/2076-5851-2018-1-88-98

ПОТОЧКОВІ ОЦІНКИ СЛАБКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДУ З НЕСТАНДАРТНИМИ УМОВАМИ ЗРОСТУ ТА МОЛОДШИМИ ЧЛЕНАМИ

В роботі розглядається квазілінійне еліптичне рівняння дивергентного виду з нестандартними умовами зросту та молодшою частиною. Доведено основний результат роботи: нерівність Гарнака для слабких розв'язків квазілінійних рівнянь дивергентного виду з нестандартними умовами зросту та молодшими членами.

Ключові слова: квазілінійні еліптичні рівняння, нерівність Гарнака, поточкові оцінки, слабкий розв'язок, потенціали Вольфа.

1. Вступ

Подана робота присвячена доведенню поточкових оцінок для слабких невід'ємних розв'язків неоднорідних квазілінійних еліптичних рівнянь дивергентного типу з молодшої частиною. Наш результат узагальнює відомий класичних результат T. Kilpelainen, J. Maly (див. [1]), які за допомогою нелінійних потенціалів Вольфа довели поточкові оцінки розв'язків квазілінійного еліптичного рівняння p-Лапласа з межею μ в правій. В подальшому, ці оцінки були узагальнені на строго нелінійні рівняння (див. [2]) та на строго нелінійні субеліптичні квазілінійні рівняння (див. роботу [3]). Отримані результати було застосовано для подальшого вивчення питань розв'язності та регулярності розв'язків для різноманітних лінійних та нелінійних рівнянь (див., наприклад, роботи J. Maly, W. Ziemer [4], G. Mingione [5], I.I. Skrypnik [6]). Завдяки тому, що деякі квазілінійні рівняння з нестандартними умовами зросту використовуються при моделюванні поведінки електрореологічних рідин (M.Ruzicka [7]), якісна теорія для таких рівнянь постійно розвивається, викликаючи до себе зацікавленість з боку дослідників. Наприклад, для рівнянь вигляду

$$-div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)+V|u|^{p(x)-2}u=f$$

було вивчено питання локальної регулярності розв'язку, доведена нерівність Гарнака, отриманий критерій Вінера при природніх припущеннях на функцію p(x). Огляд відповідних результатів можна знайти в статтях Y.A. Alkhutov, O.V. Krasheninnikova [8], V. Liskevich, I.I. Skrypnik [9]. Приклади, які було побудовано M. Giaquinta [10] та P. Marcellini [11]. показали, що за умов $t^{p-1}\le g(t)\le t^{q-1}$ на функцію $g(t)$ існує необмежений розв'язок рівняння (якщо p та q достатньо «далекі» один від одного). Для рівнянь

$$-div\left(g(a(x),\nabla u)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)=f(x)$$

з коефіцієнтами, для яких потенціали Вольфа будуть скінченними, варто очікувати, що нерівність Гарнака матиме місце (див. [14]). Основна трудність, яка виникатиме на шляху доведення цієї нерівності полягатиме в тому, що ні методика E. De Giorgi, ні метод J. Moser в цьому випадку не працюють. Але використовуючи ітераційну техніку роботи [1], яка була продемонстрована для рівняння p-Лапласа, можна довести аналогічний результат і для рівнянь, що розглядаються. Спираючись також на роботу [14], в роботі проведена схема доведення нерівності Гарнака за допомогою адаптації вищезгаданої ітераційної методики T. Kilpepailen, J.Maly для слабких невідємних розв'язків квазілінійних еліптичних рівнянь дивергентного виду з молодшою частиною.

Отже, розглянемо квазілінійне еліптичне рівняння дивергентного виду з нестандартними умовами зросту і молодшою частиною $b(x,u,\nabla u)$

$$-divA(x,\nabla u)+b(x,u,\nabla u)=f(x). \tag{1}$$

де $f(x)\in L^1(\Omega)$. Припустимо, що функція $A(x,\xi)\colon\Omega\times R^n\to R^n$, що задовольняє наступним умовам:

1) $A(x,\xi)$ задовольняє умові Каратеодорі;
2) $A(x,\xi)\geq\mu_1 g(\xi)|\xi|$,
3) $|A(x,\xi)|\leq\mu_2 g(\xi)$,
4) $|b(x,u,\xi)|\leq c_1 g(u)+c_2 g(|\xi|)$,

з деякими сталими $\mu_1,\mu_2,c_1,c_2>0$. Розглянемо випадок:

$$g\in C(R_+^1),\left(\frac{t}{\tau}\right)^{p-1}\leq\frac{g(t)}{g(\tau)}\leq\left(\frac{t}{\tau}\right)^{q-1},0<\tau\leq t,1<p\leq 1<n. \tag{2}$$

Модельним прикладом рівняння (1) служить

$$-div\left(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)+b(x,u,\nabla u)=f(x), \tag{3}$$

або

$$-div\left(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)+g(u)+g(|\nabla u|)=f(x).$$

2. Основний результат роботи: нерівність Гарнака для слабких розв'язків квазілінійних рівнянь дивергентного виду з нестандартними умовами зросту та молодшими членами

Вважатимемо, що функціональний простір слабких розв'язків рівняння (1), $W^{1,G}(\Omega)$, визначений згідно з наступним означенням слабкого роз'вязку рівняння (1).

Означення 1. Будемо казати, що u - слабкий розв`язок рівняння (1), якщо $u\in W^{1,G}(\Omega)$ та задовольняє наступній інтегральні тотожності

$$\int_\Omega A(x,\nabla u)\nabla\varphi dx+\int_\Omega b(x,u,\nabla u)\varphi dx=\int_\Omega f\varphi dx$$

для всіх $\varphi\in \overset{0}{W}{}^{1,G}(\Omega)$.

Для рівняння (3) приходимо до наступного означення слабкого розв`язку :

Означення 2. Будемо казати, що u - слабкий розв`язок рівняння (1), якщо $u\in W^{1,G}(\Omega)$ та задовольняє наступній інтегральні тотожності

$$\int_\Omega\left(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\nabla\varphi dx+\int_\Omega b(x,u,\nabla u)\varphi dx=\int_\Omega f\varphi dx \tag{4}$$

для всіх $\varphi \in \overset{0}{W}{}^{1,G}(\Omega)$.

Сформулюємо та доведемо поточкові оцінки невід'ємних слабких розв'язків рівняння (1) у термінах потенціалів Вольфа $W^{f}_{\beta,g}(x_0,R)$

$$W^{f}_{\beta,g}(x_0,R) := \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j \overline{g}\left(\rho_j^{\beta-n}\int_{B_{\rho_j}(x_0)} |f|dx\right), \rho_j = \frac{R}{2^j}, j = 1,2,\ldots$$

де $\overline{g}$ є обернена функція до функції g.

Основними результатами роботи є наступні теореми.

Теорема 1. Нехай $u \in W^{1,G}(\Omega) \cap L^{\infty}$ - невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (1) та умови 1)-4) та (2) виконуються. Тоді існують сталі $c_1, c_2 > 0$, котрі залежать тільки від p, q, n, μ_1, μ_2 такі, що для майже всіх $x_0 \in \Omega, B_{4\rho}(x_0 \subset \Omega)$ має місце наступна оцінка:

$$u(x_0) \le c_1 W^{f}_{1,g}(x_0,\rho) \tag{5}$$

або

$$g^{1+\lambda_0}\left(\frac{u(x_0)}{\rho}\right) \le c_2\rho^{-n}\int_{B_\rho(x_0)} g^{1+\lambda_0}\left(\frac{u}{\rho}\right)dx \tag{6}$$

де $0 < \lambda_0 < \frac{1}{n-1}$.

Теорема 2. Нехай $u \in W^{1,G}(\Omega) \cap L^{\infty}$ - є невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (1), $f \ge 0$ та умови 1)-4) та (2) виконані. Тоді існують сталі $c_3, c_4 > 0$, котрі залежать тільки від p, q, n, μ_1, μ_2 такі, що для майже всіх $x_0 \in \Omega, B_{4\rho}(x_0 \subset \Omega)$ має місце наступна оцінка:

$$c_3 W^{f}_{1,g}(x_0,\rho) \le u(x_0) \le c_4 \inf_{B_\rho(x_0)} u + c_4 W^{f}_{1,g}(x_0,2\rho). \tag{7}$$

3. Допоміжні твердження та леми

Методика доведення теорем 1 та 2 буде спиратися на результати роботи І.І. Скрипнік, К. О.Буряченко [14] з додаванням молодшого члена $b(x,u,\nabla u)$—це леми типу De Giorgi та Kilpelainen-Maly. В наслідок умови (2) справджується така нерівність

$$g(a)b \le \varepsilon g(a)a + g\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)b,\ a, b, \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Дійсно, якщо $b \le \varepsilon a$, то $g(a)b \le \varepsilon g(a)a$. Якщо $b \ge \varepsilon a$, то $g(a)b \le g\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)b$. Позначимо через γ деяку сталу, що залежить лише від p, q, n, μ_1, μ_2. Для доведення теорем 1 та 2 нам знадобляться наступні твердження.

Лема 1. Нехай $0 < \lambda < min\{1, p-1\}$ та $m > q$. Тоді, для кожного слабкого розв'язку u рівняння (1), деяких $0 < l, \delta, 0 < r < \rho$ та функції $\xi \in C_0^{\infty}(B_r(x_0))$, які задовольняють умовам

$$0 \le \xi \le 1, \xi(x) \equiv 1, \forall x \in B_{\frac{r}{2}}(x_0), |\nabla\xi| \le \frac{r}{2}$$

справедлива наступна оцінка:

$$\int_L \left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} G(|\nabla u|)\xi^m dx \le \gamma\delta r^{-1}\int_L\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} G(u)\xi^m dx +$$

$$+\gamma\delta r^{-1} g^{-\lambda_0}\left(\frac{\delta}{r}\right)\int_L g^{1+\lambda_0}\left(\frac{\delta}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)\right)\xi^{m-q}dx +$$

$$+\int_L g\left(\frac{\delta}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)\right)\xi^m dx + \gamma\delta\int_{B_r(x_0)} f dx, \tag{9}$$

де $L = B_r(x_0) \cap \{u > l\}, \lambda_0 = \lambda \frac{q-1}{p-1}$.

Доведення: Візьмемо $\varphi = \left(\int_l^u \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds\right)_+ \xi^m$ у якості пробної функції в інтегральній тотожності (4), що відповідає рівнянню (1). Використаємо умови 2)-4) та нерівність

$\left(\int_l^u \left(1\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds\right)_+ \leq \gamma\delta$, отримуємо

$$\int_L \left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} G(|\nabla u|)\xi^m dx \leq \gamma\delta r^{-1}\int_L g(|\nabla u|)\xi^{m-1}dx +$$
$$+\gamma\delta r^{-1}\int_L g(u)\xi^m dx + \gamma\delta\int_L f\,\xi^m dx.$$

Використаємо нерівність (8) для $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda}, a = |\nabla u|, b = \frac{\gamma\delta}{r\xi}$,

$\gamma\delta r^{-1}\int_L g(|\nabla u|)\xi^{m-1}dx \leq \frac{1}{2}\int_L \left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} G(|\nabla u|)\xi^m dx + \gamma\int_L g\left(\frac{\delta}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{1+\lambda}\right)\xi^{m-q}dx$

.

Використаємо нерівність (8) для $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda}, a = |u|, b = \frac{\gamma\delta}{r\xi}$,

$\gamma\delta r^{-1}\int_L g(|u|)\xi^{m-1}dx \leq \frac{1}{2}\int_L \left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} G(|u|)\xi^m dx + \gamma\int_L g\left(\frac{\delta}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{1+\lambda}\right)\xi^{m-q}dx$

.

Вищевказані оцінки разом з нерівністю

$$g\left(\frac{\delta}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{1+\lambda}\right) \leq g^{-\lambda_0}\left(\frac{\delta}{r}\right) g^{1+\lambda_0}\left(\frac{\delta}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)\right)$$

допомагають нам отримати необхідну оцінку (9). Покладемо тепер $\upsilon = \frac{1}{\delta}\left(\int_l^u \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\frac{1+\lambda}{p}} ds\right) r_+, F(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau$,

$$\omega = \frac{r}{\delta}\frac{F\left(\frac{\delta}{r}\upsilon^{\frac{1}{p-1-\lambda}}\right)}{\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{1+\lambda}}.$$

Тоді з (2) маємо $\frac{1}{q}G(t) \leq F(t) \leq \frac{1}{p}G(t)$.

Лема 2. Нехай виконані умови Леми 1. Тоді справедлива наступна оцінка

$$\int_L |\nabla(\omega\xi^m)|\,dx \leq \gamma r^{-1} g^{-\lambda_0}\left(\frac{\delta}{r}\right)\int_L g^{1+\lambda_0}\left(\frac{\delta}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)\right)\xi^{m-q}dx +$$
$$+\gamma\delta r^{-1}\int_L \left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} G(u)\xi^m dx + \gamma\int_{B_r(x_0)} f\,dx. \qquad (10)$$

Доведення. Зазначимо, що $\upsilon \leq \gamma\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{\frac{p-1-\lambda}{p}}$. Покладемо в (8) $\varepsilon = 1, a = \frac{\delta}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)$,

$b = |\nabla u|$, тоді для всіх $x \in L$, будемо мати

$$|\nabla(\omega\xi^m)| \leq \frac{\gamma}{\delta}\frac{g\left(\frac{\delta}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)\right)|\nabla u|\xi^m}{\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{1+\lambda}} + \frac{\gamma}{r}\frac{g\left(\frac{\delta}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)\right)}{\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{\lambda}}\xi^{m-1} \leq$$

$$\leq \frac{\gamma}{\delta}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} G(|\nabla u|)\xi^m + \frac{\gamma}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-\lambda} g\left(\frac{\delta}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)\right)\xi^{m-1} \leq$$

$$\leq \frac{\gamma}{\delta}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} G(|\nabla u|)\xi^m + \gamma\delta r^{-1}\int_L \left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} G(u)\xi^m dx +$$

$$+\frac{\gamma}{r} g^{-\lambda_0}\left(\frac{\delta}{r}\right) g^{1+\lambda_0}\left(\frac{\delta}{r}\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)\right)\xi^{m-1}.$$

В останній нерівності доданок з $\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} G(|\nabla u|)\xi^m$ оцінимо згідно з Лемою 1 (див. нерівність (9)). Це і буде доводити (10).

Покладемо $r_j = \frac{\rho}{2^j}, B_j = B_{r_j}(x_0), j = 0,1,2,\ldots$

а також

$$A_j(l) := r_j^{-n} g^{-1-\lambda_0}\left(\frac{l-l_j}{r_j}\right)\int_{B_j\cap\{u>l_j\}} g^{1+\lambda_0}\left(\frac{u-l_j}{r_j}\right)\xi_j^{m-q} dx. \tag{11}$$

Візьмемо $l_0 = 0$, а кожне наступне $l_{j+1}, j \geq 0$ визначемо з умови

$$A_j(l_{j+1}) = k.$$

Тут $k \in (0,1)$ - фіксована додатна стала, яка залежить тільки від p, q, n, μ_1, μ_2 та буде визначена в процесі доведення. Позначимо також через

$$\delta_j(l) = l - l_j, \delta_j = \delta_j(l_{j+1}) = l_{j+1} - l_j,$$

$$L_j = B_j \cap \{u > l_j\},$$

$$\xi_j \in C_0^\infty(B_j), 0 \leq \xi \leq 1, \xi_j(x) \equiv 1, \forall x \in B_{j+1}, |\nabla\xi_j| \leq \frac{2}{r_j}.$$

Наступна Лема лежить в основі метода T. Kilpelainen, J. Maly та є основним допоміжним результатом для доведення оцінок в теоремах 1 та 2.

Лема 3. Для всіх $j \geq 1$ має місце наступна оцінка

$$\delta_j \leq \frac{1}{2}\delta_{j-1} + \gamma r_j \bar{g}\left(r_j^{1-n}\int_{B_j} f\, dx\right). \tag{12}$$

Доведення. Зафіксуємо деяке $j \geq 1$ та вважатимемо

$$\delta_j \geq \frac{1}{2}\delta_{j-1}.$$

У противному випадку нерівність (12) очевидна. Встановимо, що

$$|L_j| \leq 2^n r_j^n k.$$

(13)

Насправді, для $x \in L_j, \xi_{j-1} = 1$ та $\frac{u-l_{j-1}}{\delta_{j-1}} = 1 + \frac{u-l_j}{\delta_{j-1}} \geq 1$ має місце нерівність

$$|L_j| = g^{-1-\lambda_0}\left(\frac{\delta_{j-1}}{r_{j-1}}\right)\int_{L_j} g^{1+\lambda_0}\left(\frac{\delta_{j-1}}{r_{j-1}}\right)\xi_{j-1}^{m-q} dx \leq$$

$$\leq g^{-1-\lambda_0}\left(\frac{\delta_{j-1}}{r_{j-1}}\right)\int_{L_j} g^{1+\lambda_0}\left(\frac{u-l_{j-1}}{r_{j-1}}\right)\xi_{j-1}^{m-q} dx = r_{j-1}^n k.$$

Враховуючи умови $A_j(l_{j+1}) = k$, а також (11), остання оцінка доводить (13).

Оцінемо члени в правій частині (11) при $l = l_{j+1}$. Для цього розкладемо $L_j = L_j' \cup L_j''$. Тут $L' := \left\{x \in L_j : \frac{u-l_j}{\delta_j} < \varepsilon\right\}$. Малий параметр $\varepsilon > 0$ буде визначений пізніше.

З умов (2) та (13) отримаємо:

$$\int_{L_j'} g^{1+\lambda_0}\left(\frac{u-l_j}{r_j}\right)\xi_j^{m-q}dx \le \varepsilon^{(1+\lambda_0)(p-1)}g^{1+\lambda_0}\left(\frac{\delta_j}{r_j}\right)|L_j| \le$$

$$\le 2^n\varepsilon^{(1+\lambda_0)(p-1)}r_j^n g^{1+\lambda_0}\left(\frac{\delta_j}{r_j}\right)k. \qquad (14)$$

Покладемо $\upsilon_j = \frac{1}{\delta_j}\left(\int_{l_j}^{u}\left(1+\frac{s-l_j}{\delta_j}\right)^{-\frac{1+\lambda}{p}}ds\right)$ та $\omega_j = \frac{r_j}{\delta_j}\frac{F\left(\frac{\delta_j}{r_j}\upsilon_j^{\frac{p}{p-1-\lambda}}\right)}{\left(1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{1+\lambda}}$.

Тут $F(t)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau$. Виберемо λ з умови $0<\lambda<\frac{p-1}{(q-1)(n-1)+n}$. Для всіх $x\in L_j''$ має місце наступна оцінка

$$g^{1+\lambda_0}\left(\frac{u-l_j}{r_j}\right) \le \gamma(\varepsilon)g^{-\frac{1}{n-1}+\lambda_0}\left(\frac{\delta_j}{r_j}\right)g^{\frac{n}{n-1}}\left(\frac{u-l_j}{r_j}\right)\left(1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{-\lambda\frac{n}{n-1}}. \qquad (15)$$

Крім того

$$\gamma^{-1}(\varepsilon)\upsilon_j^{\frac{p}{p-1-\lambda}} \le \frac{u-l_j}{\delta_j} \le \gamma(\varepsilon)\upsilon_j^{\frac{p}{p-1-\lambda}}. \qquad (16)$$

Використовуючи припущення $\delta_j \ge \frac{1}{2}\delta_{j-1}$, а також лему 2, отримаємо

$$\int_{L_j''} g^{1+\lambda_0}\left(\frac{u-l_j}{r_j}\right)\xi_j^{m-q}dx \le \gamma(\varepsilon)g^{-\frac{1}{n}+\lambda_0\frac{n-1}{n}}\left(\frac{\delta_j}{r_j}\right)\times$$

$$\times\left(\int_{L_j''}\frac{g^{\frac{n}{n-1}}\left(\frac{\delta_j}{r_j}\upsilon_j^{\frac{p}{p-1-\lambda}}\right)}{\left(1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{\lambda\frac{n}{n-1}}}\xi_j^{m-q}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_{L_j''} g^{1+\lambda_0}\left(\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)\xi_j^{m-q}dx\right)^{\frac{1}{n}} \le$$

$$\le \gamma(\varepsilon)r_j k^{\frac{1}{n}}g^{\lambda_0}\left(\frac{\delta j}{r_j}\right)\left(\int_{L_j}\left(\omega_j\xi_j^{(m-q)\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \le$$

$$\le \gamma(\varepsilon)r_j k^{\frac{1}{n}}g^{\lambda_0}\left(\frac{\delta j}{r_j}\right)\int_{L_j}\left|\nabla\left(\omega_j\xi_j^{(m-q)\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right|dx \le \gamma(\varepsilon)r_j k^{\frac{1}{n}}g^{\lambda_0}\left(\frac{\delta j}{r_j}\right)\times$$

$$\times\left(g^{-\lambda}\left(\frac{\delta_j}{r_j}\right)\int_{L_j} g^{1+\lambda_0}\left(\frac{\delta_j}{r_j}\left(1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)\right)\xi_j^{(m-q)\frac{n-1}{n}-q}dx+\right.$$

$$\left.+\gamma\delta r^{-1}\int_L\left(1+\frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda}G(u)\xi^m dx + r_j\int_{B_j} f dx\right). \qquad (17)$$

Враховуючи вибір m з умов $(m-q)\frac{n-1}{n}-q\ge 1$ отримаємо

$$\int_{L_j} g^{1+\lambda_0}\left(\frac{\delta_j}{r_j}\left(1+\frac{u-l_j}{r_j}\right)\right)\xi_j dx \le \gamma(\varepsilon)r_j^n g^{1+\lambda_0}\left(\frac{\delta_j}{r_j}\right)k. \qquad (18)$$

Тоді з оцінок (14), (17) та (18) приходимо до нерівності

$$k \le 2^n\varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)}k + \gamma(\varepsilon)k^{\frac{1}{n}}\left(k + g^{-1}\left(\frac{\delta_j}{r_j}\right)r_j^{1-n}\int_{B_j} f dx\right). \qquad (19)$$

Вибираємо ε достатньо малим, $2^n\varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)}=\frac{1}{4}$, а далі вибираємо

$k = k(\varepsilon){:}\, \gamma(\varepsilon)k^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}$. Тоді з (19) буде слідувати (12). Лема 3 доведена.

Повернемося до доведення теореми 1, використовуючи доведені твердження (леми 1-3)

Нерівність (12) просумуємо по $j = 1,2,\ldots I-1$.

$$l_I \leq \gamma\delta_0 + \gamma W_{1,g}^{f}(x_0, 2\rho). \tag{20}$$

З визначення l_I маємо, що $\delta_0 < \infty$, тоді послідовність $\{l_j\}_{j\in N}$ збігається та $\delta_j \to 0$ при $j \to \infty$. Перейдемо до границі $I \to \infty$ в (20). Нехай $l := \lim_{j\to\infty} l_j$. Тоді

$$\frac{1}{r_j^n}\int_{B_j}(u-l)_+^{(1+\lambda_0)(p-1)} \leq \gamma\delta_j^{(1+\lambda_0)(p-1)} \to 0, j \to \infty.$$

Вибираємо в якості x_0 лебегову точку функції $\int_{B_j}(u-l)_+^{(1+\lambda_0)(p-1)}$. Матимемо: $u(x_0) \leq l$. Якщо ж $u(x_0) \geq 2\gamma W_{1,g}^{f}(x_0, 2\rho)$, тоді з (20) слідує друга оцінка теореми 1. Теорема 1 повністю доведена.

В основі доведення теореми 2 лежать наступні дві леми.

Нехай $\psi(t) = \frac{F(t)}{t}, t > 0$, тоді справджується наступне твердження. Для нашого випадку воно аналогічно твердженню роботи [2] без молодших членів.

Лема 4. [2]. Нехай виконані припущення теореми 2, $1 < \sigma_0 < 1, 0 < r < \rho$. Тоді існує додатна стала γ, яка залежить тільки від p, q, n, μ_1, така що

$$\left(\frac{1}{(\sigma' r)^n}\int_{B_{\sigma' r}(x_0)}\psi^{s_0}\left(\frac{u}{\sigma' r}\right)dx\right)^{\frac{1}{s_0}} \leq \left(\frac{\gamma}{(\sigma-\sigma')^q}\frac{1}{(\sigma r)^n}\int_{B_{\sigma' r}(x_0)}\psi^{s}\left(\frac{u}{\sigma r}\right)dx\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{21}$$

для всіх $0 < \sigma_0 \leq \sigma' < \sigma < 1$ та для всіх $0 < s < s_0 < \frac{n}{n-1}$.

Доведення. Нехай $k \geq 1$ найменше ціле число, таке що $\left(\frac{n}{n-1}\right)^k s_0 \leq s$. Для $j = 1,2,\ldots,k$ покладемо $r_j = \left(\sigma' + (\sigma-\sigma')\frac{j}{k}\right)r, B_j = B_{r_j}(x_0)$ нехай $\xi_j \in C_0^\infty(B_j)$, $0 \leq \xi_j \leq 1, \xi_j = 1$ в B_{j-1} та $|\nabla\xi_j| \leq \frac{\gamma k}{(\sigma-\sigma')r}$. Покладемо $\xi_j = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^j s_0 > 0$ та $\psi_j = \xi_j^q \psi^{1-\varepsilon_j}\left(\frac{u}{r_j}\right)$. Відмітимо також, що

$$\frac{p-1}{p}\frac{g(t)}{t} \leq \psi'(t) = \frac{g(t)}{t} - \frac{F(t)}{t^2} \leq \frac{q-1}{q}\frac{g(t)}{t}.$$

З теореми вкладення Соболева та нерівності (8) буде слідувати

$$\left(\int_{B_j}\psi_j^{\frac{n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \gamma\int_{B_j}|\nabla\psi_j|\,dx \leq$$

$$\leq \gamma\int_{B_j}\psi^{1-\varepsilon_j}\left(\frac{u}{r_j}\right)|\nabla\xi_j|\xi_j^{q-1}dx + \gamma\int_{B_j}\psi^{-\varepsilon_j}\left(\frac{u}{r_j}\right)\frac{g\left(\frac{u}{r_j}\right)}{u}|\nabla u|\xi_j^q\,dx. \tag{22}$$

Підставимо в означення слабкого розв'язку $\varphi = \psi^{-\varepsilon_j}\left(\frac{u}{r_j}\right)\xi_j^q$ та за допомогою умови (2) і (8) отримаємо:

$$\int_{B_j}u^{-1}\psi^{-\varepsilon_j}\left(\frac{u}{r_j}\right)G(|\nabla u|)\xi_j^q\,dx \leq \gamma\int_{B_j}\psi^{-\varepsilon_j}\left(\frac{u}{r_j}\right)g\left(\frac{u}{(\sigma-\sigma')r}\right)|\nabla\xi_j|dx \leq$$

$$\leq \frac{\gamma}{(\sigma-\sigma')^q r} \int_{B_j} \psi^{1-\varepsilon_j}\left(\frac{u}{r_j}\right). \qquad (23)$$

З нерівностей (22), (23) буде слідувати

$$\left(\int_{B_j} \psi_j^{\frac{n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{\gamma}{(\sigma-\sigma')^q r} \int_{B_{j+1}} \psi_{j+1}^{\frac{n}{n-1}} dx.$$

Інтегруючи останню нерівність отримуємо необхідну оцінку (21).

Наступна лема – слабка нерівність Гарнака. Нагадаємо, що у випадку двофазних інтегральних функціоналів подібний результат був отриманий M. Colombo, G. Baroni, G. Mingione [15]. Доведемо аналог цього результату для нашого рівняння.

Лема 5. Нехай виконані умови теореми 2, тоді для $0 < s_0 < \frac{n}{n-1}$ і будь-якого $0 < r \leq \rho$ має місце наступна нерівність:

$$\left(r^{-n} \int_{B_{2r}(x_0)} g^{s_0}\left(\frac{u}{r}\right) dx\right)^{\frac{1}{s_0}} \leq \gamma g\left(\frac{m(r)}{r}\right), \qquad (24)$$

де $m(r) = \inf\limits_{B_r(x_0)} u.$

Доведення. З умови (2) буде слідувати

$$r^{-n} \int_{B_{2r}(x_0)} g^{\frac{p_0}{q-1}}\left(\frac{u}{r}\right) dx \leq \gamma g^{\frac{p_0}{q-1}}\left(\frac{m(r)}{r}\right)\left(1 + r^{-n} \int_{B_{2r}(x_0)} \left(\frac{u}{m(r)}\right)^{p_0} dx\right) \leq \gamma g^{\frac{p_0}{q-1}}\left(\frac{m(r)}{r}\right).$$

Застосовуючи лему 4 приходимо до оцінки (24).

Оцінка зверху в нерівності (7) теореми 2 буде слідувати з теореми 1 та леми (5) при $r = \rho$:

$$u(x_0) \leq \gamma m(\rho) + \gamma W^f_{1,g}(x_0, 2\rho).$$

Доведемо оцінку знизу в (7). Для цього в інтегральну тотожність

$$\int_\Omega A(x, \nabla u)\nabla\varphi dx + \int_\Omega b(x, u, \nabla u)\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx$$

підставимо $\varphi = \xi^q, \xi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$, $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi = 1$ в $B_{\frac{r}{2}}(x_0)$ та $|\nabla\xi| \leq \gamma r^{-1}$, $0 < r \leq \rho$. Використовуючи умови 2)-3) та нерівність (8) з $\varepsilon_1 = \varepsilon\psi^{-\beta}\left(\frac{u-m(r)}{r}\right)\frac{1}{u-m(r)}$, $0 < \beta < \min\left(1, \frac{1}{(n-1)(q-1)}\right)$ отримаємо:

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} f dx \leq \gamma \int_{B_r(x_0)} g(|\nabla u|)|\nabla\xi|\xi^{q-1} dx \leq \gamma\varepsilon \int_{B_r(x_0)} \psi^{-\beta}\left(\frac{u-m(r)}{r}\right)\frac{G(|\nabla u|)}{u-m(r)}\xi^q dx +$$

$$+\frac{\gamma}{r}\int_{B_r(x_0)} g\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{u-m(r)}{r}\psi^\beta\left(\frac{u-m(r)}{r}\right)\right) dx. \qquad (25)$$

Застосуємо тепер слабку нерівність Гарнака (лему 5):

$$\gamma\delta r^{-1}\int_L \left(1 + \frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} G(u)\xi^m dx + \varepsilon\int_{B_r(x_0)} \psi^{-\beta}\left(\frac{u-m(r)}{r}\right)\frac{G(|\nabla u|)}{u-m(r)}\xi^q dx \leq$$

$$\leq \gamma r^{-1}\varepsilon\int_{B_r(x_0)} \psi^{1-\beta}\left(\frac{u-m(r)}{r}\right) dx \leq$$

$$\leq \gamma r^{-1}\varepsilon\int_{B_r(x_0)} g^{1-\beta}\left(\frac{u-m(r)}{r}\right) dx \leq \gamma r^{n-1} g\left(\frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right). \qquad (26)$$

Так як $0 < \beta < \min\left(1, \frac{1}{(n-1)(q-1)}\right)$, $\varepsilon = g^\beta\left(\frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right)$, то

$$\gamma r^{-1}\int_{B_r(x_0)} g\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{u-m(r)}{r}g^{\beta}\left(\frac{u-m(r)}{r}\right)\right)dx \le$$

$$\le \gamma r^{n-1} g\left(\frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right)+\gamma r^{-1}\varepsilon^{-1-q}\int_{B_r(x_0)} g^{1+\beta(q-1)}\left(\frac{u-m(r)}{r}\right)dx \le$$

$$\le \gamma r^{n-1} g\left(\frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right). \quad (27)$$

З (25)-(27) отримаємо

$$\bar{g}\left(r^{1-n}\int_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} f dx\right) \le \left(\frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right). \quad (28)$$

Інтегруючи нерівність (28) по $r \in (0,\rho)$ та користуючись означенням потенціалу Вольфа

$$\int_0^{\rho} \bar{g}\left(r^{1-n}\int_{B_r(x)} f dz\right) dr = W^{f}_{1,g}(x,\rho),$$

Отримали оцінку знизу в (7). Теорема 2 повністю доведена.

4. Висновки

В роботі було розглянуто квазілінійне еліптичне рівняння дивергентного виду з нестандартними умовами зросту і молодшою частиною. За допомогою адаптації ітераційної техніки T.Kilpelainen, J. Maly для таких рівнянь доведено основний результат роботи: нерівність Гарнака для слабких розв’язків квазілінійних рівнянь дивергентного виду з нестандартними умовами зросту та молодшими членами.

Список використаної літератури:

1. Kilpelainen T. The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations / T. Kilpelainen, J. Maly // Acta Math.. – 1994.–Vol. 172, № 1.–P. 137–161. Accessed mode: https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.acta/1485890757.
2. Labutin D. A. Potential estimates for a class of fully nonlinear elliptic equations / D. A. Labutin // Duke Math. J.– 2002.– Vol. 111, № 1.–P. 1–49.– DOI:10.1215/S0012-7094-02-11111-9.
3. Trudinger N. S. On the weak continuity of elliptic operators and applications to potential theory / N. S. Trudinger, X. J. Wang // Amer. J. Math.– 2002.– Vol. 124.– P. 369–410.– DOI:10.1353/ajm.2002.0012.
4. Maly J. Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations / J. Maly, W. Ziemer // AMS, Providence, RI.– 1997.– № 51. – Accessed mode: https://www.ams.org/books/surv/051/surv051-endmatter.pdf.
5. Mingione G. Regularity of minima: an invitation to the dark side of the calculus of variations / G. Mingione // Appl. Math.– 2006.–Vol. 51, № 4.– P. 355–426.– DOI:10.1007/s10778-006-0110-3.
6. Skrypnik I. I. The Harnack inequality for a nonlinear elliptic equation with coefficients from the Kato class / I. I. Skrypnik // Ukr. Mat. Visn.– 2005.– № 2.– P. 219– 235.
7. Ruzicka M. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory / M. Ruzicka // Springer, Berlin.– 2000. –№ 14.– p. 178. – Accessed mode: https://www.springer.com/gp/book/9783540413851.
8. Alkhutov Y. A. Continuity at boundary points of solutions of quasilinear elliptic equations with a nonstandard growth condition / Y. A. Alkhutov, O. V. Krasheninnikova // Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.– 2004.–Vol. 68, № 6.– P. 3–60.– DOI: 10.1070/IM2004v068n06ABEH000509

9. Liskevich V. Harnack inequality and continuity of solutions to quasilinear degenerate parabolic equations with coefficients from Kato-type classes / V. Liskevich, I. I. Skrypnik // J. Diff. Equa.–2009.– № 247.– P. 2740–2777. – Accessed mode: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039609003295
10. Giaquinta M. Growth conditions and regularity, a counterexample / M. Giaquinta // Manuscr. Math.– 1987.– Vol. 59, № 2.– P. 245–248.– Accessed mode: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01158049
11. Marcellini P.Un exemple de solution discontinue d'un probleme variationnel dans le cas scalaire / P. Marcellini // Preprint, Istituto Matematico U. Dini.–1987.– № 11.– https://www.researchgate.net/publication/270271477_Un_exemple_de_solution_discontinue_d'un_probleme_variationnel_dans_le_cas_scalaire
12. De Giorgi E. Sulla differenziabilitae lanaliticita delle estremali degli integrali multipli regolari / E. De Giorgi // Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.–1957.– Vol.3, № 3.– P. 25–43.– Accessed mode: https://www.researchgate.net/profile/Antonio_Leaci/publication/225828030_Existence_theorem_for_a_minimum_problem_with_free_discontinuity_set/links/563f127c08aec6f17ddb5c6f/Existence-theorem-for-a-minimum-problem-with-free-discontinuity-set.pdf#page=175
13. Moser J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations / J. Moser // Comm. Pure Appl. Math.–1961.– Vol. 14, № 3.– P. 577–591.– Accessed mode: https://doi.org/10.1002/cpa.3160140329.
14. Skrypnik I.I. Pointwise estimates of solutions to the double-phase elliptic equations / I. I. Skrypnik, K.O. Buryachenko//Journal of Math.Sciences. -2017.- V. 222.- P. 772-786.– Accessed mode: https://link.springer.com/article/10.1007/s10958-017-3331-6.
15. Colombo M. Regularity for double phase variational problems /M. Colombo, G. Baroni, G. Mingione// ARMA. -2015. - 215(2).- P. 443-496.– Accessed mode: https://link.springer.com/article/10.1007/s00205-014-0785-2

References:

1. Kilpelainen T. (1994). The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations. *Acta Math*, 172 (1), 137–161. https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.acta/1485890757.
2. Labutin D. A. (2002). Potential estimates for a class of fully nonlinear elliptic equations. *Duke Math. J.* 111 (1), 1–49. DOI:10.1215/S0012-7094-02-11111-9.
3. Trudinger N. S. (2002). On the weak continuity of elliptic operators and applications to potential theory, *Amer. J. Math*. 124, 369–410.– DOI:10.1353/ajm.2002.0012.
4. Maly J. (1997). Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations, *AMS, Providence, RI.* 51. https://www.ams.org/books/surv/051/surv051-endmatter.pdf.
5. Mingione G. (2006). Regularity of minima: an invitation to the dark side of the calculus of variations, *Appl. Math*, 51(4), 355–426. DOI:10.1007/s10778-006-0110-3.
6. Skrypnik I. I. 2005 The Harnack inequality for a nonlinear elliptic equation with coefficients from the Kato class, *Ukr. Mat. Visn*, 2, 219– 235.
7. Ruzicka M. (2000). *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory* Springer, Berlin. 14. p. 178. https://www.springer.com/gp/book/9783540413851.
8. Alkhutov Y. A. (2004). Continuity at boundary points of solutions of quasilinear elliptic equations with a nonstandard growth condition, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.* 68(6), 3–60. DOI: 10.1070/IM2004v068n06ABEH000509
9. Liskevich V. (2009). Harnack inequality and continuity of solutions to quasilinear degenerate parabolic equations with coefficients from Kato-type classes, *J. Diff. Equa.* 247. 2740–2777, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039609003295

10. Giaquinta M. (1987). Growth conditions and regularity, a counterexample, *Manuscr. Math*, 59(2), 245–248. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01158049
11. Marcellini P. (1987). Un exemple de solution discontinue d'un probleme variationnel dans le cas scalaire, *Preprint, Istituto Matematico U. Dini*, 11. https://www.researchgate.net/publication/270271477_Un_exemple_de_solution_discontinue_d'un_probleme_variationnel_dans_le_cas_scalaire
12. De Giorgi E. (1957). Sulla differenziabilitae lanaliticita delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat*, 3 (3), 25–43. https://www.researchgate.net/profile/Antonio_Leaci/publication/225828030_Existence_theorem_for_a_minimum_problem_with_free_discontinuity_set/links/563f127c08aec6f17ddb5c6f/Existence-theorem-for-a-minimum-problem-with-free-discontinuity-set.pdf#page=175
13. Moser J. (1961). On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math,* 14(3), 577–591, https://doi.org/10.1002/cpa.3160140329.
14. Skrypnik I.I. (2017). Pointwise estimates of solutions to the double-phase elliptic equations, *Journal of Math.Sciences*, 222, 772-786. https://link.springer.com/article/10.1007/s10958-017-3331-6.
15. Colombo M. (2015). Regularity for double phase variational problems, *ARMA*, 215(2), 443-496, https://link.springer.com/article/10.1007/s00205-014-0785-2

S. T. Akopian
Master's Degree, Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine

Yu. S. Kudrych
Assistant, Master's Degree, Vasyl' Stus Donetsk National University,
Vinnytsia, Ukraine,
uliakudrych1994@gmail.com

POITWISE ESTIMATES OF WEAK SOLUTIONS TO QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS OF A DIVERGENCE TYPE WITH NONSTANDARD GROWTH CONDITIONS AND LOWER TERMS

Summary. *In the present work we obtain the pointwise estimates of the weak solutions to inhomogeneous quasilinear elliptic equations of the divergence type and lower terms. Our result generalizes the classical one obtained by T. Kilpelainen and J. Maly. With the help of nonlinear Wolff potential they proved the pointwise estimates of solutions to a quasilinear elliptic equation with the p-Laplace and measure μ on the right-hand side. Further, these estimates were generalized to strongly nonlinear equations and to strongly nonlinear subelliptic quasilinear equations and were applied as an efficient tool to the study of the questions of solvability and solutions regularity to various linear, quasilinear and nonlinear equations (see the works of J. Maly and W. Ziemer, G. Mingione and I.I. Skrypnik). Due to application of some quasilinear equations with nonstandard growth conditions for the modeling of a behavior of electrorheological fluids, the qualitative theory of such equations is permanently developed, attracting the interest of researchers.*

Key words: quasilinear elliptic equations, Harnack inequality, poitwise estimates, weak solution, Wolff potentials.

Одержано редакцією 03.09.2018
Прийнято до друку 27.12.2018