

ORCID: 0000-0002-4906-3673

А. В. Воронцова

Магістр, Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця,
Україна,
aki57776@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3363-2229

К. О. Буряченко

Кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна,
katarzyna_@ukr.net

УДК 517.94

PACS 02,03,05,06,07

DOI: 10.31651/2076-5851-2018-1-113-119

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПАРАМЕТРОМ В ПРАВИЙ ЧАСТИНІ

У роботі розглядається перша крайова задача для квазілінійного рівняння другого порядку з параметром в правій частині та нелінійного степеневого зросту. За допомогою операторних методів доведено теорему існування класичного розв'язку задачі. Наведено методично-теоретичні аспекти застосувань отриманого результату для розв'язання відповідних задач.

Ключові слова: крайові задачі, квазілінійне рівняння другого порядку, функція Гріна, нерухома точка, теорема Шаудера.

1. Вступ

Подана робота присвячена отриманню умов розв'язності крайових задач для квазілінійних рівнянь другого порядку з параметром в правій частині у випадку нелінійного степеневого зросту довільного порядку. У основі сформульованої задачі лежить лінійна та квазілінійна задачі зі змінними коефіцієнтами. Дослідження проводиться за допомогою операторних методів та методу нерухомої точки. А саме з використанням теореми Шаудера та її наслідків. Основним результатом роботи є теорема розв'язності першої крайової задачі для рівняння виду:

$$a_0(t) \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x(t) = f(\lambda x(t), t),$$

$$x(0) = x(1) = 0,$$

де $f(\lambda x(t), t) = \lambda x^n + g(t)$.

Одержані результати мають методично-теоретичне значення та можуть бути використані не тільки у подальших дослідженнях диференціальних рівнянь у частинних похідних та у прикладних задачах, а також у розробці відповідних прикладів нелінійних рівнянь з степеневою нелінійністю, описі методики розв'язання цих задач за допомогою функції Гріна та теорем Шаудера про нерухомі точки.

2. Основний результат роботи: теорема про розв'язність крайових задач для квазілінійних рівнянь другого порядку з параметром в правій частині

Розглянемо першу крайову задачу для квазілінійного рівняння другого порядку з параметром і нелінійним степеневим зростом по $x(t)$ у правій частині: $x^n(t), n > 1$:

$$a_0(t) \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x(t) = f(\lambda x(t), t), \quad (1)$$

$$x(0) = x(1) = 0, \quad (2)$$

де $f(\lambda x(t), t) = \lambda x^n + g(t), a_0(t) \neq 0$.

Сформулюємо умови на коефіцієнти при функції $x(t)$ та на функцію $g(t)$ у правій частині: $a_0(t), a_1(t), a_2(t) \in C_{[0,1]}$, $a_2(t) \leq 0$ та $g(t) \in C_{[0,1]}$.

Наступна теорема є основним результатом роботи та визначає умови розв'язності поставленої задачі (1), (2).

Теорема. Нехай $a_0(t), a_1(t), a_2(t), g(t) \in C_{[0,1]}$, $a_0(t) \neq 0$, $a_2(t) \leq 0$, $f(\lambda x, t) = \lambda x^n + g(t)$ та виконана одна з умов:

$$1) \quad \|g\|_{C_{[0,1]}} \leq \frac{n-1}{n \varepsilon^{n-1} \sqrt[n]{n \varepsilon |\lambda|}}, \text{ якщо параметр } \lambda \text{ відомий,}$$

або

$$2) \quad |\lambda| \leq \left(\frac{n-1}{\|g\|} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n \varepsilon} \right)^n, \text{ якщо задана функція } g(t),$$

де $G = \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 |G(\tau, t)| d\tau$, $G(\tau, t)$ – функція Гріна даної задачі. Тоді задача (1), (2) має розв'язок в просторі $C_{[0,1]}^2$.

Доведення. Слідуючи методиці пошуку розв'язку, зведемо задачу до операторного рівняння. Розв'язок задачі (1), (2) за допомогою функції Гріна подається у виді рівняння:

$$x(t) = \int_0^1 G(\tau, t) (\lambda x^n + g(\tau)) d\tau.$$

Позначимо праву частину за оператор:

$$Ax(t) = \int_0^1 G(\tau, t) (\lambda x^n + g(\tau)) d\tau.$$

Звідки отримаємо задачу про знаходження нерухомої точки оператора $x(t) = Ax(t)$.

Отже, існування розв'язку крайової задачі для заданого рівняння еквівалентно пошуку нерухомої точки оператора

$$Ax(t) = \int_0^1 G(\tau, t) (\lambda x^n + g(\tau)) d\tau.$$

Перевіримо існування нерухомої точки оператора за допомогою теореми Шаудера. Нехай $x \in C_{[0,1]}$, $Ax(t) = \int_0^1 G(\tau, t) (\lambda x^n + g(\tau)) d\tau$ та

$D = \bar{B}_R(0) = \{x \in C_{[0,1]} : \|x\|_{C_{[0,1]}} \leq R\}$, де $R > 0$. Перевіримо неперервність та компактність оператора A . Представимо оператор A у вигляді композиції $A = I \circ N$, де I – інтегральний оператор, ядром якого є функція Гріна задачі (1), (2)

$$Iu(t) = \int_0^1 G(\tau, t) u(\tau) d\tau,$$

а N – оператор Немицького, що визначається заданою функцією

$$f: (Nx)(t) = (N_f x)(t) = f(x(t), t).$$

Оператор I з неперервним ядром – неперервний та компактний. Оператор N – неперервний. Тоді A є композицією неперервних операторів, тобто A – неперервний. Крім того, A – компактний, як композиція неперервного та компактного.

Для використання теореми Шаудера треба забезпечити умову $A: D \rightarrow D$, тобто $\|x\|_{C_{[0,1]}} \leq R, \forall x(t) \in C_{[0,1]}$. Звідки випливає $\|Ax\|_{C_{[0,1]}} \leq R$.

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{C[0,1]} &= \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 |G(\tau, t) (\lambda x^n(\tau) + g(\tau))| d\tau \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} |\lambda x^n(t) + g(t)| \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 |G(\tau, t)| d\tau = G \|\lambda x^n + g\|_{C[0,1]} \\ &\leq G \left(|\lambda| \|x\|_{C[0,1]}^n + \|g\|_{C[0,1]} \right) \leq G \left(|\lambda| R^n + \|g\|_{C[0,1]} \right) \leq R. \end{aligned}$$

Тобто, $G|\lambda|R^n + G\|g\|_{C[0,1]} - R < 0$. Отримаємо з цього виразу необхідні для розв'язності умови для функції $g(t)$ та параметру λ .

Позначимо $G|\lambda|R^n + G\|g\|_{C[0,1]} - R = \varphi(R)$ та знайдемо мінімальне значення цієї функції.

$$\varphi' = nG|\lambda|R^{n-1} - 1 = 0.$$

Отримуємо два випадки:

1. Якщо n – парне, то $R_{min} = \sqrt[n-1]{\frac{1}{nG|\lambda|}}$ (див. рис. 1)

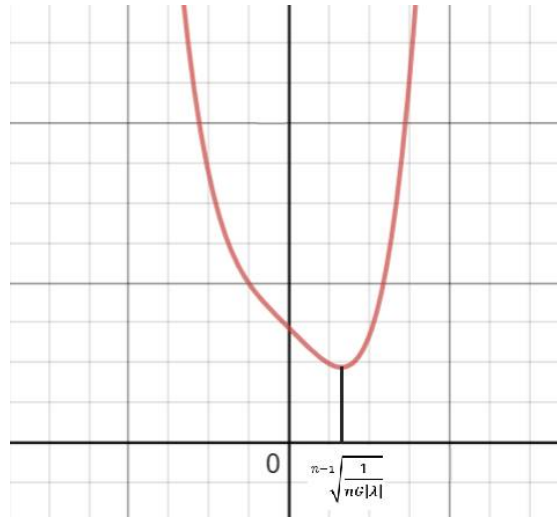


Рис. 1

2. Якщо n – непарне, $R_{1,2} = \pm \sqrt[n-1]{\frac{1}{nG|\lambda|}}$, звідки $R_{max} = -\sqrt[n-1]{\frac{1}{nG|\lambda|}}$, $R_{min} = \sqrt[n-1]{\frac{1}{nG|\lambda|}}$ (див. рис. 2)

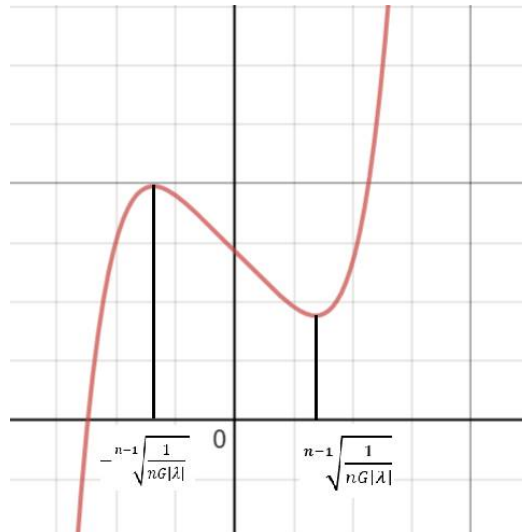


Рис. 2

Отже, не залежно від парності n $R_{\min} = \frac{1}{\sqrt[n-1]{nG|\lambda|}}$.

$$\varphi(R_{\min}) = G|\lambda| \frac{1}{nG|\lambda|^{\frac{n-1}{n-1}} \sqrt[n-1]{nG|\lambda|}} + G\|g\|_{C_{[0,1]}} - \frac{1}{\sqrt[n-1]{nG|\lambda|}} \leq 0$$

$$\frac{1}{n^{\frac{n-1}{n-1}} \sqrt[n-1]{nG|\lambda|}} + G\|g\|_{C_{[0,1]}} - \frac{1}{\sqrt[n-1]{nG|\lambda|}} \leq 0.$$

З цієї рівності отримаємо умови для функції $g(t)$ та параметра λ

$$\|g\|_{C_{[0,1]}} \leq \frac{n-1}{nG^{\frac{n-1}{n-1}} \sqrt[n-1]{nG|\lambda|}};$$

$$|\lambda| \leq \left(\frac{n-1}{\|g\|}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{nG}\right)^n.$$

Перевіримо, якому простору належить розв'язок.

Нехай x_0 – розв'язок задачі (1), (2), тоді $a_0(t)\dot{x}_0 = \lambda x_0^n + g(t) - a_1(t)\dot{x}_0 - a_2(t)x_0(t)$ за умовою $\lambda x_0^n + g(t) - a_1(t)\dot{x}_0 - a_2(t)x_0(t) \in C_{[0,1]}$, отже $\ddot{x}_0 \in C_{[0,1]}$, тоді $x_0(t) \in C_{[0,1]}^2$.

3. Застосування основного результату роботи

Доведений в роботі основний результат допомагає розробити низку завдань методичного характеру, які дозволять використати їх в якості методичного забезпечення курсу «Теорія нелінійних операторів». Нехай дана перша крайова задача для квазілінійного рівняння другого порядку з параметром у правій частині і нелінійним степеневим зростом по $x(t)$: $x^n(t), n > 1$:

$$a_0(t) \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x(t) = \lambda x^n + g(t), \quad (3)$$

$$x(0) = x(1) = 0, \quad (4)$$

де $a_0(t) \neq 0, a_2(t) \leq 0$ та $a_0(t), a_1(t), a_2(t), g(t) \in C_{[0,1]}$.

В цьому напрямку можливі завдання двох типів: по заданій функції $g(t)$ знайти множину зміни параметра, в якій відповідна перша крайова задача матиме розв'язок, а також за відомим значенням параметра описати множину в просторі неперервних функцій, до якої має належати доданок $g(t)$, для того щоб відповідна перша крайова задача мала розв'язок.

Завдання 1. Знайти значення параметру λ , при яких задача (3), (4) має розв'язки, якщо відома функція $g(t)$.

Наведемо приклади задач:

$$1. \quad (t+1)x'' - x' - \frac{3x}{t+1} = \lambda x^4 + t^3 - t, \quad x(0) = x(1) = 0;$$

$$2. \quad (t+1)^2 x'' + 2(t+1)x' - 2x = \lambda x^2 - \cos t, \quad x(0) = x(1) = 0;$$

$$3. \quad (3+t^2)x'' + 2tx' = \lambda x^7 - t\sqrt[3]{t-1}, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Завдання 2. Знайти, для яких функцій $g(t)$ задача (3), (4) має розв'язки, якщо відомий параметр λ .

Наведемо приклади задач:

$$1. \quad t^2 x'' - x' = 6x^5 - g(t), \quad x(0) = x(1) = 0;$$

$$2. \quad (t^2 + 1)x'' - 2tx' = 3x^9 - g(t), \quad x(0) = x(1) = 0;$$

$$3. \quad \left(\frac{x'}{t-2}\right)' - \frac{3x}{(t-2)^2} = 8x^4 - g(t), \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Як приклад наведемо розв'язок однієї із запропонованих задач.

$$2.1. \quad (t^2 + 1)x'' - 2tx' = 3x^9 - g(t), \quad x(0) = x(1) = 0.$$

$$a_0(t) = t^2 + 1 \in C[0,1], \quad a_1(t) = -2t \in C[0,1], \quad a_2(t) = 0.$$

Отже, за теоремою дана задача має розв'язок при $\|g\|_{C[0,1]} \leq \frac{n-1}{nG^{n-2}\sqrt[n]{nG|\lambda|}}$. Знайдемо значення цього виразу. $\lambda = 3, n = 9$.

Побудуємо функцію Гріна для однорідної задачі:

$$(t^2 + 1)x'' - 2tx' = 0, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вид: $x_{\text{ог}} = c_1 \arctgt + c_2$. При виконанні крайових умов задача має лише тривіальний розв'язок, отже можливо побудувати функцію Гріна.

Нехай, $x_1 = \arctgt$ – нетривіальний розв'язок, який задовольняє умові $x(0) = 0$, $x_2 = 4\arctgt - \pi$ – нетривіальний розв'язок, який задовольняє умові $x(1) = 0$.

Функція Гріна має вид $G(t,s) = \begin{cases} \alpha_1(s) \arctgt, & t \in [0,s] \\ \alpha_2(s)(4\arctgt - \pi), & t \in [s,1] \end{cases}$ Знайдемо $\alpha_1(s), \alpha_2(s)$ з умов:

$$\begin{cases} \alpha_1 \arctgs = 4\alpha_2(4\arctgs - \pi) \\ \frac{4\alpha_2}{1+s^2} - \frac{\alpha_1}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2} \end{cases}.$$

Тоді функція Гріна набуде вигляду:

$$G(t,s) = \begin{cases} \left(\frac{4\arctgs}{\pi} - 1\right) \arctgt, & t \in [0,s] \\ \frac{\arctgs}{\pi} (4\arctgt - \pi), & t \in [s,1] \end{cases}.$$

Далі розрахуємо знайдемо значення інтегралу від отриманої функції Гріна:

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(t,s) ds &= \int_0^t \left(\frac{4\arctgs}{\pi} - 1\right) \arctgt ds + \int_s^1 \frac{\arctgs}{\pi} (4\arctgt - \pi) ds \\ &= (\arctgt - 1) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2\right) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2). \end{aligned}$$

Тепер можливо знайти необхідне значення $G = \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 |G(t,s)| ds \approx 0,44$.

Отже, дана задача має розв'язок при

$$\|g\|_{C[0,1]} \leq \frac{n-1}{nG^{n-2}\sqrt[n]{nG|\lambda|}} = \frac{8}{9 \times 0,44^2 \sqrt[9]{9 \times 0,44 \times 3}} = 1,5.$$

Висновки

В роботі було сформульовано теорему про розв'язність першої крайової задачі для квазілінійних рівнянь другого порядку з параметром у правій частині. Сформульована теорема дозволяє досліджувати розв'язність квазілінійних рівнянь з нелінійним степеневим зростом по $x(t)$ та параметром λ . На основі основного результату роботи сформульовано та наведено два типи завдань на розв'язність першої крайової задачі квазілінійного рівняння другого порядку з параметром у правій частині у випадку нелінійного степеневого зросту по $x(t)$, які можуть бути використані у подальшому методичному забезпеченні курсу «Теорія нелінійних операторів» для студентів ОР «Магістр».

Список використаної літератури:

1. Birkhoff, G.D. Invariant points in function space / O.D. Kellogg, G.D. Birkhoff, // Trans. Amer. Math. Soc. . – 1922. – Vol. 23. – P. 95 – 115.

2. Bohl, P. Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage // *J. reine angew. Math.* – 1904. – Vol 127. – P. 179-276.
3. Brouwer, L. E. J. Über eindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich // *MA* – 1910. – Vol 69. – P. 176–180.
4. Leray J. Topologie et équations fonctionnelles/ Leray J., Schauder J. // *Ann. Sci. École Norm.* – 1934. – Sup. 61. – P. 45-73.
5. Meetings of the Moscow Mathematical Society// *Uspekhi Mat. Nauk*, – 1955. – Vol 10, Issue 3. – P 65.
6. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles // *J. Math. Pures Appl.*, – 1881 –Vol 7 – P. 375–422.
7. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles // *J. Math. Pures Appl.*, – 1882 – Vol 8 – P. 251–286.
8. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles // *J. Math. Pures Appl.*, – 1885 –Vol 1, p. 167-244.
9. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles // *J. Math. Pures Appl.*, – 1886 – Vol 2 – P. 151-217.
10. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen // *Math. Zeitschr.* – 1927. – Vol. 26, №. 1. – P. 47. —65.
11. Schauder, J. Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen // *Studia Math.* – 1929. – Vol 1. №1. – P.123-139
12. Tychonoff, A. Ein Fixpunktsatz // *MA* –1935 – Vol 111– P.767-776
13. Боль П. О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применяемых в механике / Дисс. к.ф.-м.н. Юрьев, 1900. — 114 с
14. Буряченко К.О. Теорема про нерухомі точки та їх застосування в теорії диференціальних рівнянь: Текст лекцій / К.О. Буряченко, О.Л. Зуєв. Донецьк: ДонНУ, 2007. — 43 с.
15. Колмогоров А.М., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976.
16. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. Изд. 2-е, испр, М.: КомКнига, 2007. – 240с.
17. Фрум-Кетков Р. Л., Об отображениях в сферу банахова пространства / Докл. АН СССР – 1967 – Том 175, № 6. – С. 1229 – 1231.
18. Шашкин Ю. А. Неподвижные точки. – М.: Наука, 1989. — 80 с.
19. Шраменко В.М. Застосування нелінійного функціонального аналізу до теорії диференціальних рівнянь: навч. посібник/ В.М. Шраменко, К.О. Буряченко, Д.В. Лиманський – Донецьк: ДонНУ, 2011. — 184 с.

References

1. Birkhoff, G.D., Kellogg, O.D.(1922) Invariant points in function space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1922, vol. 23.
2. Bohl, P. Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage (1904). *J. reine angew. Math.* (127), 179-276.
3. Brouwer, L. E. J. Über eindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich (1910). *MA*, 69, 176–180.
4. Leray J. Schauder J. Topologie et équations fonctionnelles (1934). *Ann. Sci. École Norm.*, 61, 45-73.
5. Meetings of the Moscow Mathematical Society (1955). *Uspekhi Mat. Nauk*, 10 (3), 65.
6. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles (1881). *J. Math. Pures Appl.*, 7, 375–422.

7. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles (1882). *J. Math. Pures Appl.*, 8, 251–286.
8. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles (1885). *J. Math. Pures Appl.*, 1, 167-244.
9. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles (1886) *J. Math. Pures Appl.*, 2, 151-217.
10. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen (1927). *Math. Zeitschr*, 26(1), 47-65.
11. Schauder, J. Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen (1929). *Studia Math*, 1(1), 123-139.
12. Tychonoff, A. Ein Fixpunktsatz (1935), *MA*, 111, 767-776.
13. Bohl P., On some general differential equations applied in mechanics. (1900) Ph.D. Yuriev.
14. Buryachenko K.O., Zuev O.L. *Theorems on fixed points and their application in the theory of differential equations: Text of lectures* (2007). Donetsk: DonNU.(in Ukr.)
15. Kolmogorov A.M, Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis* (1976). М.: Nauka.(in Russ.)
16. Filippov A.F. *An Introduction to the Theory of Differential Equations: A Textbook.*(2007). М.: KomKniga.(in Russ.)
17. Frum-Ketkov, R. L., On mappings in the sphere of Banach space (1967). Dokl. USSR Academy of Sciences, 175 (6), 1229-1231.(in Russ.)
18. Shashkin Y. A. *Fixed points* (1989). М.: Nauka.(in Russ.)
19. Shramenko V.M, Buryachenko K.O., Limansky D.V., *Application of nonlinear functional analysis to the theory of differential equations: teach. Manual* (2011). Donetsk: DonNU. (in Ukr.).

A. Vorontsova

Master's Degree, Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine,
aki57776@gmail.com

K. Buryachenko

Candidate of Physics and Mathematics Sciences, associate professor,
Department of Mathematical Analysis and Differential Equations,
Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine,
katarzyna@ukr.net

**SOLVABILITY OF THE BOUNDARY PROBLEMS FOR THE QUASILINEAR
SECOND ORDER EQUATIONS WITH PARAMETER IN THE RIGHT-HAND SIDE**

Summary. *The paper is devoted to the problem of solvability of the first boundary value problem for a quasilinear second-order equation with a parameter in the right-hand side and a power nonlinearity of arbitrary order. Using the operator methods (inverse operator method, fixed point method), the theorem for the existence of a classical solution of a problem is proved. The methodological and theoretical aspects of the application of the obtained result for the solving of the corresponding problems are given.*

Keywords: boundary value problems, quasilinear second-order equation, Green's function, fixed point, Schauder theorem.

*Одержано редакцією 04.09.2018
Прийнято до друку 25.12.2018*