МАТЕМАТИЧНА ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ФІЗИКА

ORCID: 0000-0002-7388-4922

О. Д. Кічмаренко

Кандидат фіз.-мат. наук, доцент, кафедра оптимального керування і економічної кібернетики, Одеський національний університет імені І.І. Мечнікова, Одеса, Україна, k.olga@paco.net

ORCID: 0000-0002-6405-5604

Є.В. Платонова

Ассистент, кафедра оптимального керування і економічної кібернетики, Одеський національний університет імені І.І. Мечнікова, Одеса, Україна jane.platonova@gmail.com

УДК 517.9
DOI: 10.31651/2076-5851-2018-1-78-87

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ МНОЖИНИ ДОСЯЖНОСТІ КЕРОВАНОЇ СИСТЕМИ

У статті розглядається наближений метод побудови множини досяжності керованої системи на основі апроксимації множини допустимих керувань. Записано дві апроксимації множини допустимих керувань, для яких отримано залежності оптимальних керувань від нових параметрів. Метод описано покроково для лінійної системи, наведено приклад.

1 ВСТУП

Задачі оптимального керування виникають у різних областях науки і техніки, економіки, механіки та фінансової математики. Зазвичай необхідно переводити систему із одного стану до деякого кінцевого стану, застосовуючи певне керування. Якість такого переводу (вибір керування) оцінюється критерієм - функцією, яку треба максимізувати або мінімізувати на множині допустимих керувань. Застосовуючи необхідні умови оптимальності у формі принципа максимуму Л.С. Понтрягіна, знаходять множину керувань, серед яких є оптимальні керування, а для лінійних задач принцип максимума є і достатніми умовами оптимальності. Найчастіше допустимі керування обирають із класу кусково-неперервних або вимірних функцій, що приводить до крайових задач з розривною правою частиною. В роботі [1] обгрунтована можливість переходу до неперервного керування шляхом апроксимації множини допустимих керувань. Завдяки цьому, крайова задача принципа максимума вже буде мати неперервні праві частини.

Множина досяжності грає фундаментальну роль в теорії керування [2]. Знання множини досяжності дає можливість розв'язати задачі швидкодії, системзу та інші. Побудова множини досяжності часто потребує великого обсягу обчислень [3] та використовує метод динамічного програмування, розроблений

Р.Белманом [4]. Іншим підходом до побудови множини досяжності є його оцінка за допомогою множин більш простої форми [5].

Запропонований в роботі алгоритм спирається на використання апарату опорних функцій [6] для побудови множини досяжності та забезпечує неперервність керування. Для різних апроксимацій множини допустимих керувань допоміжної задачі отримано явний вигляд оптимального керування для побудови точок границі множини досяжності.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ І НЕОБХІДНІ ОЗНАЧЕННЯ

Розглядається лінійна задача оптимального керування об'єктом, рух якого описується системою диференціальних рівнянь виду:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad u \in U \tag{1}$$

Тут $x \in R^n$, $u \in U \subset R^s$ - множина допустимих керувань є опуклим компактом, що містить початок координат; $A(t),\ B(t)$ - матриці, що задовольняють умови:

A1) матриці $A(t),\ B(t)$ аналітичні, $t \in [t_0, \infty]$;

A2) матриця $B(t)$ - має обернену, $t \in [t_0, \infty]$.

Допустимі керування обираються із класу вимірних обмежених функцій $u(t)$, що залежать від часу $t \in R^1$ і приймають значення в U. Будемо розглядати розв'язок системи (1) на інтервалі $[0\,,\ L]$, де $L > 0$ - деякий відомий параметр.

Поставимо у відповідність системі (1) наступну систему:

$$\dot{y} = \quad A(t)y + B(t)u, \quad u \in U_k \tag{2}$$

де множина U_k задовольняє умови:

B1) множина U_k - сильно опуклий компакт, що містить початок координат;

B2) границя ∂U_k множини U_k нескінченно гладка;

B3) для деякого $\varepsilon_1 \geq 0$ виконується $h(U_k, U) \leq \varepsilon_1$ ($h(\cdot,\cdot)$ -відстань по Хаусдорфу між множинами).

Розглянемо функціонали

$$\max_{u \in U} J[u] = c^{\mathrm{T}} x(L), \tag{3}$$

$$\max_{u_k \in U_k} J_k[u] = c^{\mathrm{T}} y(L) \tag{4}$$

та відповідні задачі оптимального керування (1),(3) і (2),(4).

Розв'язком задачі (1),(3) будемо називати пару $(x^*(t), u^*(t))$, якщо $u^*(t)$ - допустиме керування і $J[u^*] = \max\limits_{u \in U} J[u]$, а $x^*(t)$ - траєкторія, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

Аналогічно розуміємо розв'язок (2),(4).

В роботі Тинянского Н.Т. і Сокола В.А. [7] показано, що для системи (2), що задовольняє умовам B1), B2) (для множини допустимих керувань) і A1), A2) (для матриць $A(t)$ і $B(t)$), оптимальне керування, за допомогою якого здійснюється перехід з точки x_0 в початок координат, нескінченно диференційоване по t.

Нехай множина допустимих керувань системи (1) має вигляд:

$$U = [-\alpha_1, \alpha_1] \times [-\alpha_2, \alpha_2] \times ... \times [-\alpha_s, \alpha_s], \alpha_i > 0, i = 1, ..., s. \tag{5}$$

В роботі [1] наведено приклад аппроксимації множини допустимих керувань (5) задачі (1) і (3), яка дозволяє перейти до задачі (2), (4) з неперервно-диференційованим оптимальним керуванням.

Теорема 1. *[1]*

Нехай для систем (1) *і* (2) *виконані умови A1) і A2), а множина* U_k *задовольняє умовам B1) і B2).*

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ *і* $L > 0$ *існують такі* $\delta(\eta, L) > 0$ *і* $k^0(\delta, \eta, L) \geq 0$, *що для всіх* $k \geq k^0$ *і* $0 \leq t \leq L$ *справедливі наступні нерівності:*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \eta \tag{6}$$

$$h(D(t, t_0, x_0), D_k(t, t_0, y_0)) < \eta, \tag{7}$$

де $x(t), y(t)$ *- траєкторії систем* (1) *і* (2), *відповідні керування* $u \in U$ *і* $u_k \in U_k$ *відповідно,* $D(t, t_0, x_0)$ *і* $D_k(t, t_0, y_0)$ *- множина досяжності в момент часу* t *систем* (1) *і* (2) *відповідно, при* $x_0 = y_0$ *і* $h(U, U_k) < \delta$.

Для систем (1) і (2) виконані умови Теореми 1, тому множини досяжності цих систем будуть близькі при деяких значеннях параметрів задач.

3 ПОБУДОВА МНОЖИНИ ДОСЯЖНОСТІ НА ОСНОВІ АПРОКСИМАЦІЇ МНОЖИНИ ДОПУСТИМИХ КЕРУВАНЬ.

3.1 *Побудова множини досяжності у випадку, коли множина, що апроксимує U, має гладку границю.*

Знайдемо вираз для оптимального керування в задачі (2), (4) у випадку, коли $B(t) \equiv I$ - одинична матриця, $U \subset R^2$ і множина U_k задано в вигляді [1]:

$$\partial U_k = \left(\alpha_1 w_1 \left(1 - \sin^{2k} \varphi\right), \alpha_2 w_2 \left(1 - \cos^{2k} \varphi\right)\right), \tag{8}$$

де φ обирається з $[0, 2\pi]$

φ	w_1	w_2
$(0; {}^{\pi}\!/_2]$	1	1
$({}^{\pi}\!/_2, \pi]$	-1	1
$(\pi, {}^{3\pi}\!/_2]$	-1	-1
$({}^{3\pi}\!/_2, 2\pi]$	1	-1

На Рис.1 зображено множини допустимих керувань U_3 та $U = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

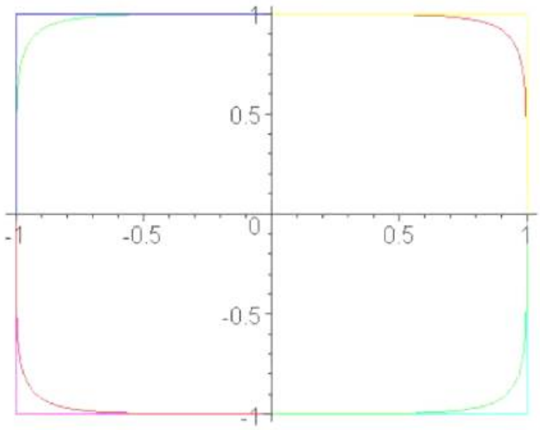

Рис. 1. Множина U_k при $k = 3$

Для задачі (2), (4) випишемо функцію Гамільтона

$$H(t, u_k, x, \phi) = \phi A(t)x + \phi u_k \to \max_{u_k \in U_k}$$

і спряжену систему з граничними умовами:

$$\dot{\phi} = -A(t)^T \phi,$$
$$\phi(L) = c.$$

Згідно з теоремою Вейєрштрасса функція Гамільтона досягає свого максимуму на границі множини U_k. Тому $H(t, u_k, x, \phi)$ можна переписати у вигляді:

$$H = [\phi A(t)x + \phi_1 \alpha_1 w_1 (1 - \sin^{2k} \varphi) + \phi_2 \alpha_2 w_2 (1 - \cos^{2k} \varphi)] \to \max_{\varphi \in [o, 2\pi]},$$

де φ- новий параметр керування.

Користуючись принципом максимуму, оптимальне керування знаходимо з умови $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$. Отримуємо

$$tg\varphi = \left(\frac{\phi_2\alpha_2 w_2}{\phi_1\alpha_1 w_1}\right)^{\frac{1}{2(k-1)}} \tag{9}$$

якщо $\phi_1 \neq 0$, і $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ (в залежності від знака ϕ_2) інакше.

Підставляючи (9)в вираз для керуючих параметрів $\begin{array}{l} u_1 = \alpha_1 w_1(1 - \sin^{2k+1}\varphi), \\ u_2 = \alpha_2 w_2(1 - \cos^{2k+1}\varphi), \end{array}$

отримаємо

$$u_1^*(t) = \begin{cases} \alpha_1 \cdot sign\phi_1(t) \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1+\left|\frac{\phi_1(t)\alpha_1}{\phi_2(t)\alpha_2}\right|^{\frac{1}{k-1}}\right)^k}\right), & \text{якщо} \quad \phi_2(t) \neq 0, \\ \alpha_1 \cdot sign\phi_1(t), \text{ якщо } \quad \phi_2(t) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$u_2^*(t) = \begin{cases} \alpha_2 \cdot sign\phi_2(t) \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1+\left|\frac{\phi_2(t)\alpha_2}{\phi_1(t)\alpha_1}\right|^{\frac{1}{k-1}}\right)^k}\right), & \text{якщо} \quad \phi_1(t) \neq 0. \\ \alpha_2 \cdot sign\phi_2(t), \quad \text{якщо } \phi_1(t) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Отримали наступну крайову задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)y + u_k^*, & x(t_0) = x_0 \\ \dot{\phi} = -A^T(t)\phi, & \phi(T) = c \end{cases}, \tag{12}$$

де u_1^*, u_2^* визначаються з (10), (11) розв'язання, якої в кінцевий момент часу L при кожному c ($\|c\| = 1$) буде задавати точку границі множини досяжності системи (2).

3.2 *Побудова множини досяжності в випадку, коли множина, що апроксимує U, має неперервну границю.*

Знайдемо тепер вираз для оптимального керування в задачі (2), (4) у випадку, коли $B(t) \equiv I$ і границя множинива U_k задано у вигляді:

$$\partial U_k = (R\cos(q_1 + q_2(\varphi - q_1)) + z_1\ , R\sin(q_1 + q_2(\varphi - q_1)) + z_2)\,. \tag{13}$$

Для задачі (2), (4) функція Гамільтона і спряжена система з граничними умовами будуть мати вигляд:

$$H(t, u_k, x, \phi) = \phi A(t)x + \phi u_k \to \max_{u_k \in U_k},$$

$$\begin{aligned} &\dot{\phi} = -A^T(t)\phi, \\ &\phi(T) = c. \end{aligned}$$

Відповідно до теореми Вейєрштрасса функція Гамільтона досягає свого максимуму на границі множини U_k. Тому $H(t, u_k, x, \phi\,)$ можна переписати у вигляді:

$$H = \phi A(t)x + \phi_1 R\cos(q_1 + q_2(\varphi - q_1)) + z_1 +$$
$$+\phi_2 R\cos(q_1 + q_2(\varphi - q_1)) + z_1 \to \max_{\varphi\in[o,2\pi]},$$

де φ- новий параметр керування.

Користуючись принципом максимуму, оптимальне керування знаходимо з умови $\frac{\partial H}{\partial\varphi} = 0$. Отримуємо

$$tg(q_1 + q_2(\varphi - q_1)) = \frac{\phi_2}{\phi_1},$$

якщо $\phi\,_1 \neq 0$, і $q_1 + q_2(\varphi - q_1) = \pm\frac{\pi}{2}$ (в залежності від знака ϕ_2) інакше.

Тоді

$$\cos^2(q_1 + q_2(\varphi - q_1)) = \frac{1}{1 + \left({\phi_2}/{\phi_1}\right)^2},$$

$\sin^2(q_1 + q_2(\varphi - q_1)) = \frac{1}{1+\left({\phi_1}/{\phi_2}\right)^2}$, но

$$\cos(q_1 + q_2(\varphi - q_1)) = \frac{sign\phi_1}{\left(1 + \left({\phi_2}/{\phi_1}\right)^2\right)^{1/2}},$$

$$\sin(q_1 + q_2(\varphi - q_1)) = \frac{sign\phi_2}{\left(1 + \left({\phi_1}/{\phi_2}\right)^2\right)^{1/2}}$$

Тоді оптимальне керування має вигляд:

$$u_1^*(t) = \begin{cases} sign\phi_1(t)\cdot\left(\sqrt{1+k^2}\dfrac{1}{\left(1+\left({\phi_2}/{\phi_1}\right)^2\right)^{1/2}} + z_1\right), & \text{якщо} \quad \phi_2(t) \neq 0 \\ sign\phi_1(t), \quad \text{якщо} \quad \phi_2(t) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

$$u_2^*(t) = \begin{cases} sign\phi_2(t)\cdot\left(\sqrt{1+k^2}\dfrac{1}{\left(1+\left({\phi_1}/{\phi_2}\right)^2\right)^{1/2}} + z_2\right), & \text{якщо} \quad \phi_1(t) \neq 0 \\ sign\phi_2(t), \quad \text{якщо} \quad \phi_1(t) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

В цьому випадку оптимальне керування буде тільки неперервним, але не диференційованим.

Таким чином, ми отримали наступну крайову задачу:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)y + u_k^*, & x(t_0) = x_0 \\ \dot{\phi} = -A^T(t)\phi, & \phi(T) = c \end{cases}, \tag{16}$$

де u_1^*, u_2^* визначаються з (14), (15), розв'язання, якої в кінцевий момент часу T при кожному c ($\|c\| = 1$) буде задавати точку границі множини досяжності системи (2).

У загальному випадку, якщо задати рівняння границі $U_k = \{f_1(\varphi), f_2(\varphi)\}$, де φ - новий керуючий параметр, то для задачі (2), (4) функція Гамільтона матиме вигляд:

$$H = [\phi A(t)x + \phi_1 f_1(\varphi) + \phi_2 f_2(\varphi)] \to \max_{\varphi \in [o, 2\pi]}.$$

Оптимальне значення нового керуючого параметру φ^* можна знайти з принципу максимуму Понтрягіна, і це буде деяка функція, що залежить від $\frac{\phi_1}{\phi_2}$, тобто $\varphi^* = f\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)$. Тоді оптимальне значення u_k^* буде деяка функція від $\frac{\phi_1}{\phi_2}$, тобто $u_k^* = \tilde{f}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)$.

4 АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ МНОЖИНИ ДОСЯЖНОСТІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ.

Крок 1. Для системи (1) записати лінійний функціонал (2), де $\|c\| = 1$

Крок 2. Для множини допустимих керувань побудувати множину, що задовільняє умовам B1) (наприклад, по формулам (8) або (13)) і перейти до задачі з новими керуючими параметрами.

Крок 3. Записати функцію Гамільтона та знайти оптимальне керування для нового параметра керування.

Крок 4. Записати крайову задачу (16), розв'язок якої в момент L дає точку границі множини досяжності в момент L.

Крок 5. Перебираючи значення вектору $\|c\| = 1$ з деяким заданим кроком, розв'язати крайову задачу кроку 4 та отримати точки, що належать границі множини досяжності.

5 ПРИКЛАД

Побудуємо множину досяжності для системи в момент часу $L = 50$:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = u_1, && x_1(0) = 0 \quad u \in U = [-1, 1] \times [-1, 1] \\ &\dot{x}_2 = 0,1tx_1 + u_2, && x_2(0) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Крок 1. Записуємо лінійний фунціонал $\max_{u \in U} J[u] = c^{\mathrm{T}} x(L)$, де $\|c\| = 1$

Крок 2. Записуємо аппроксимацію для множини допустимих керувань

$$U_k = \left(w_1\left(1-\sin^{2k}\varphi\right), w_2\left(1-\cos^{2k}\varphi\right)\right), w_1 = w_1(\varphi), w_2 = w_2(\varphi)$$

Крок 3. Записуємо функцію Гамільтона та знаходимо оптимальне керування для нового параметра керування по формулам (10), (11)

$$u^*_{k1}(t) = \begin{cases} sign\phi_1(t)\cdot\left(1-\frac{1}{\left(1+\left|\frac{\phi_1(t)}{\phi_2(t)}\right|^{\frac{1}{k-1}}\right)^k}\right), & \text{якщо} \quad \phi_2(t)\neq 0, \\ sign\phi_1(t), \text{ якщо} \quad \phi_2(t)=0 \end{cases}$$

$$u^*_{k2}(t) = \begin{cases} sign\phi_2(t)\cdot\left(1-\frac{1}{\left(1+\left|\frac{\phi_2(t)\alpha_2}{\phi_1(t)\alpha_1}\right|^{\frac{1}{k-1}}\right)^k}\right), & \text{якщо} \quad \phi_1(t)\neq 0. \\ sign\phi_2(t), \quad \text{якщо } \phi_1(t)=0 \end{cases}$$

Крок 4. Записуємо крайову задачу (16), розв'язок якої в момент $L = 50$ дає точку границі множини досяжності в момент $L = 50$.

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = u^*_{k1}, & x_1(0)=0, \\ \dot{x}_2 = 0,1tx_1 + u^*_{k2}, & x_2(0)=0, \\ \dot{\phi}_1 = -0.1t\phi_2, & \phi_1(50)=c_1, \\ \dot{\phi}_2 = 0, & \phi_2(50)=c_2 \end{array}$$

де u^*_1 u^*_2 знаходяться по формулам (10), (11).

Крок 5. Перебираючи значення вектору $c = (\sin(\gamma), \cos(\gamma))$, де $\gamma \in [0, 2\pi]$ з кроком $\pi/10$, розв'язуємо крайову задачу кроку 4 та отримаємо точки, що належать границі множини досяжності.

На малюнку 1 зображено керування $u(t)$(синім) системи (17) та керування $u^*_k(t)$(червоним) для деякого вектора c. При збільшенні k керування $u_k(t)$ залишається неперервним і апроксимує розривне керування $u(t)$.

На малюнку 2 зображено отриману множину досяжності системи (17) в момент часу $L = 50$ для $k = 20$

6 ВИСНОВКИ

Таким чином, в статті розглянуто метод наближеної побудови множини досяжності для задач оптимального керування. Розглянуто випадок задач з розривним оптимальним керуванням. Запропоновано спосіб побудови множини допустимих керувань для наближеної задачі керування, що забезпечує неперервність оптимального керування і близькість до траєкторій вихідної задачі.

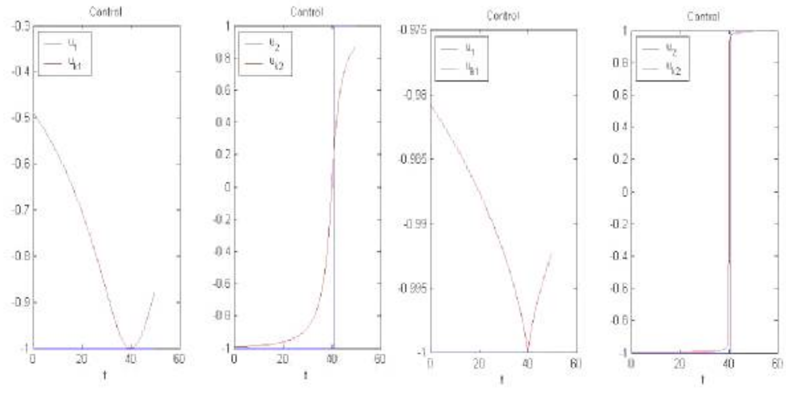

Рис. 2. Керування системи при $k = 2$ та $k = 6$

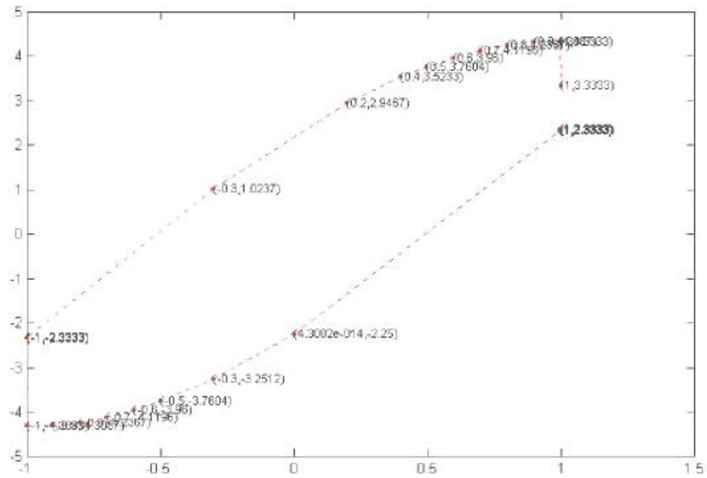

Рис. 3. Множина досяжності при $k = 20$

ЛІТЕРАТУРА

[1] *Кичмаренко О.Д., Платонова Е.В.* Построение аппроксимации множества достижимости для линейных задач управления// Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2017. – Т. 31. – С. 163-170.

[2] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.М* атематическая теория оптимальных процессов — М.: Наука, 1983. 393 с.

[3] *Новикова А.О.* Построение множеств достижимости некоторых управляемых систем пиксельным методом // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. 2012. № 9, С. 136–153.

[4] *Беллман Р.* Динамическое программирование. - М.: Иностранная литература, 1960. - 400 с.

[5] *Черноусько Ф. Л.* Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60, No 6. С. 940–950.

[6] *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление(линейная теория): Учебник/В.И. Благодатских. Под ред. В.А. Садовничего. - М.:Вісш.шк., 2001.-239 с.:ил.

[7] *Сокол В.А., Тынянский Н.Т.* Приближённый метод решения линейной задачи оптимального быстродействия. - Журнал выч. математики и мат. физики, 1980, №2.

O. D. Kichmarenko
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, department of optimal control and economic cybernetics,
Odessa I.I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine
k.olga@paco.net

Ye.V. Platonova
Assistant, department of optimal control and economic cybernetics,
Odessa I.I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine
jane.platonova@gmail.com

APPROXIMATE METHOD OF CONSTRACTION OF THE SET OF THE REACH OF A CONTROLLED SYSTEM

In the article the approximate method of construction of the set of the reach of a controlled system is considered. It is based on the approximation of the set of acceptable controls. Two approximations of the set of acceptable controls are written, for which the dependencies of optimal controls on the new parameters are obtained. The method is described step by step for a linear system, an example is given.

Отримано редакцією 01.10.2018
Прийнято до друку 22.12.2018