МЕТОДИЧНІ НОТАТКИ – З ДОСВІДУ ВИКЛАДАННЯ ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ В ВИЩІЙ ШКОЛІ

ORCID: 0000-0002-6183-8689

О. А. Гулівець

Кандидат технічних наук, доцент, кафедра прикладної механіки та загальноінженерних дисциплін, механіко-машинобудівний факультет, Криворізький національний університет

ORCID: 0000-0002-6169-8874

С. Ю. Олійник

Асистент, кафедра прикладної механіки та загальноінженерних дисциплін, механіко-машинобудівний факультет, Криворізький національний університет, oleynic.sveta@gmail.com

УДК 514.742:531.1 PACS 02.40.Hw, 45.40. – f

DOI: 10.31651/2076-5851-2019-1-107-122

БЕЗКООРДИНАТНИЙ МЕТОД ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ВЕКТОРНИХ ФУНКЦІЙ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

В теоретичній механіці широко застосовуються векторні величини, над якими проводяться ряд математичних операцій.

Сучасні умови роботи вищої школи вимагають застосовувати такі методи проведення математичних операцій над векторними величинами, які б переконливо та з малими затратами часу дозволяли виконувати доведення тих чи інших теоретичних положень цієї дисципліни.

Таким вимогам найбільш відповідають безкоординатні (векторні) методи проведення математичних операцій над векторними величинами.

На основі аналізу годографів векторних функцій скалярного аргумента установлено, що при змінюванні вектора функції одночасно за напрямом та модулем вектор її похідної дорівнює геометричній сумі вектора похідної, що характеризує швидкість змінювання напряму вектора функції, та вектора похідної, що характеризує швидкість змінювання її вектора за модулем.

В роботі також установлено, що на величину вектора похідної, який характеризує швидкість змінювання напряму вектора функції, впливають кутові швидкості обертання рухомих систем відліку та установлена залежність, яка характеризує цей зв'язок.

Ключові слова: вектор, функція, скаляр, аргумент, годограф, диференціювання, похідна.

1. Вступ

Постановка проблеми. Теоретична механіка, як наука про механічний рух та взаємодію матеріальних тіл, відіграє дуже важливу роль при формуванні у студентів вміння мислити механічними категоріями і є базою для вивчення ряду інженерних дисциплін.

При вивченні дисципліни «Теоретична механіка» проводиться доведення певних теоретичних положень, при виконанні яких проводяться ряд математичних операцій над векторними та скалярними величинами.

В теоретичній механіці широко застосовуються методи векторного числення, які мають більші переваги перед координатними методами, дякуючи їх компактності і фізичній наочності векторних формул.

В сучасних умовах роботи вищої школи, коли стрімко зменшується кількість часу на аудиторне навчання, при вивченні теоретичної механіки постає необхідність застосовувати такі методи проведення математичних операцій над векторними величинами, які б переконливо з малими затратами часу дозволяли виконувати доведення тих чи інших теоретичних положень з даної дисципліни.

Отже, розробка нових методів проведення певних математичних операцій над векторними величинами, які б відповідали цим вимогам є актуальним для вищої школи.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. При дослідженнях ряду фізичних явищ над векторними величинами, що їх описують, проводять математичні операції: знаходження суми, векторного і скалярного добутку, добуток векторної величини на скалярну, диференціювання та інтегрування, які достатньо повно і на високому рівні розглянуті в ряді літературних джерел з вищої математики [1-4] та теоретичної механіки [5-14].

Як відомо [5] є два методи проведення математичних операцій над векторними величинами: безкоординатний та координатний. При безкоординатному методі оперують безпосередньо з векторами, не зв’язуючи їх з певними системами координат. При координатному методі операції проводяться над скалярними величинами, які аналітично визначають вектор в деякій системі координат.

Обидва методи дозволяють побудувати систему інваріантних операцій, які не залежать від вибору координатної системи, але які за формою запису відрізняються. Безкоординатний метод є більш компактним в порівнянні з координатним і застосовується переважно при проведенні теоретичних досліджень.

У розглянутих літературних джерелах з вищої математики [1-4] при диференціюванні векторних функцій скалярного аргументу застосовано лише координатні методи (при диференціюванні векторні функції розкладають вздовж осей певної системи координат).

В джерелах з теоретичної механіки [5-13] при диференціюванні векторних функцій скалярного аргументу в основному також застосований координатний метод.

В роботах [6, 12, 13] формулу Ейлера для визначення швидкості точки тіла при обертальному русі як векторного добутку кутової швидкості тіла на радіус-вектор точки одержано безкоординатним методом. Однак при виведенні формули Бура, яка виражає зв’язок між відносною і абсолютною похідними від радіуса-вектора точки, використано координатний метод.

В роботі [14] приведено розроблений безкоординатний метод диференціювання векторних функцій скалярного аргументу та його застосування для доведення теорем кінематики матеріальної точки та твердого тіла, який ґрунтується на представленні її вектора у вигляді добутку одиничного вектора на модуль цього вектора. Застосування цього методу при доведенні теорем кінематики точки та твердого тіла дозволяє скоротити час на їх доведення, але є недостатньо наочним.

Мета статті. На основі аналізу властивостей векторних функцій скалярного аргументу і геометричної інтерпретації їх годографів розробити безкоординатний метод їх диференціювання, який повинен бути наочно переконливим для застосування в навчальному процесі.

2. Матеріал і результати досліджень

В теоретичній механіці – науці про механічний рух та взаємодію матеріальних об’єктів – широко застосовуються методи векторного числення, які мають велику перевагу перед координатним методом внаслідок компактності і фізичної наочності векторних формул.

В ряді досліджень використовують змінні векторні величини, які є функціями скалярних величин – векторними функціями скалярного аргумента.

При дослідженнях механічного руху точки та твердого тіла векторними функціями скалярного аргумента (часу) є радіуси-вектори точок $\overline{r} = \overline{r}(t)$, їх швидкості $\overline{\upsilon} = \overline{\upsilon}(t)$ та прискорення $\overline{a} = \overline{a}(t)$.

При кінематичних дослідженнях над векторними функціями скалярного аргументу проводяться математичні операції: знаходження їх суми, векторного та скалярного їх добутку, добутку векторних функцій на скалярну функцію або сталу скалярну величину, диференціювання та інтегрування.

Математичні операції над векторними функціями скалярного аргумента: знаходження їх суми, векторного та скалярного добутку, добутку векторних функцій на скалярну функцію виконуються так само як і над будь-якими векторними величинами.

Диференціювання векторних функцій скалярного аргументу, добутку векторних функцій на скалярну, скалярного або векторного добутків векторних функцій виконується за правилами, які аналогічні відомим правилам диференціювання скалярних функцій.

Так як при дослідженнях кінематики та динаміки механічних явищ виникає необхідність диференціювати певні векторні функції скалярного аргумента (часу, дуги та ін.), які можуть бути різними за фізичним змістом, то спочатку введемо поняття похідної довільної векторної функції скалярного аргументу не надаючи їй конкретного фізичного змісту.

Нехай деяке механічне явище характеризується в певній системі відліку деякою безперервною векторною функцією $\overline{a}(u)$ скалярного аргумента u.

Лінія, яку окреслить при безперервному змінюванні скалярного аргумента u кінець вектора $\overline{a}(u)$, початок якого знаходиться в деякій зафіксованій точці простору, буде годографом векторної функції скалярного аргументу $\overline{a}(u)$. Годографом такої функції може бути пряма лінія, плоска або просторова крива. Якщо вектор функції буде змінюватись лише за величиною, то годографом цієї функції буде пряма лінія, яка бере початок у зафіксованій точці простору. Якщо вектор функції буде змінюватись лише за напрямом при незмінній величині, то годографом функції $\overline{a}(u)$ буде плоска або просторова крива, яка розташована на сфері, радіус якої буде дорівнювати модулю вектора функції. При одночасному змінюванні векторної функції за напрямом і модулем її годографом буде плоска або просторова крива, або лінія, яка не проходить через зафіксовану точку простору.

Розглянемо три частинні випадки змінювання векторної функції, коли годографи функції будуть розташовані на площині:

1) функція змінюється лише за напрямом (рис. 1, а);
2) функція змінюється лише за модулем (величиною) (рис. 1, б);
3) функція змінюється одночасно за напрямом та модулем (рис. 1, в).

Нехай в усіх трьох випадках деякому значенню аргумента u відповідає точка M годографа функції $\overline{a}(u)$, положення якої відносно зафіксованої точки простору O буде визначати радіус-вектор $\overline{a}(u)$, а після приросту аргумента на величину Δu, значення функції буде $\overline{a}(u+\Delta u)$, якому відповідає точка M', положення якої визначається радіусом-вектором $\overline{a}(u+\Delta u)$.

Тоді приріст векторної функції $\overline{a}(u)$, що відповідає приросту скалярного аргумента Δu визначиться різницею

$$\Delta\overline{a} = \overline{a}(u + \Delta u) - \overline{a}(u). \tag{1}$$

Як відомо з вищої математики, похідною першого порядку векторної функції $\overline{a}(u)$ називається змінний вектор, який визначається рівністю

$$\frac{d\overline{a}(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\overline{a}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overline{a}(u + \Delta u) - \overline{a}(u)}{\Delta u}, \tag{2}$$

якщо границя в правій частині цієї рівності існує.

Розглянемо визначення похідної векторної функції, яка змінюється при зміні скалярного аргумента лише за напрямом (див. рис. 1, а).

У цьому випадку вектор приросту функції $\Delta\overline{a}(u)$, який спрямований по січній $MM^{/}$, при $\Delta u \to 0$, гранично буде спрямований по дотичній до годографа векторної функції $\overline{a}(u)$ в точці M.

Отже вектор похідної $\dfrac{d\overline{a}}{du}$, що визначається згідно з рівнянням (2), характеризує швидкість змінювання вектора $\overline{a}(u)$ при змінюванні аргумента u і буде спрямованим по дотичній до годографа функції в бік зростання аргумента. А так як модуль $\left|\overline{a}(u)\right| = const$, то вектор $\dfrac{d\overline{a}}{du}$ буде перпендикулярним векторові $\overline{a}(u)$.

Модуль векторної функції скалярного аргумента у випадку, що розглядається є сталою величиною $\left|\overline{a}(u)\right| = a$, тому трикутник $MOM^{/}$ (див. рис. 1, а) є рівнобедреним, в якому кут $\Delta\varphi$ характеризує поворот вектора $\overline{a}(u)$, що відповідає зміні аргумента Δu. З трикутника МОМ$^{/}$ модуль приросту векторної функції визначається з рівняння

$$\left|\Delta\overline{a}\right| = MM' = 2a\sin\frac{\Delta\varphi}{2}. \tag{3}$$

Тоді модуль похідної векторної функції $\overline{a}(u)$ визначається згідно з рівнянням

$$\left|\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right| = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\left|\Delta\overline{a}\right|}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{2a\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta u}. \tag{4}$$

Помножимо чисельник і знаменник правої частини рівняння (4) на $\dfrac{\Delta\varphi}{2}$ і одержимо

$$\left|\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right| = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{2a\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2} \cdot \dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta u \cdot \dfrac{\Delta\varphi}{2}} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{a\Delta\varphi \cdot \sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta u \cdot \dfrac{\Delta\varphi}{2}}. \tag{5}$$

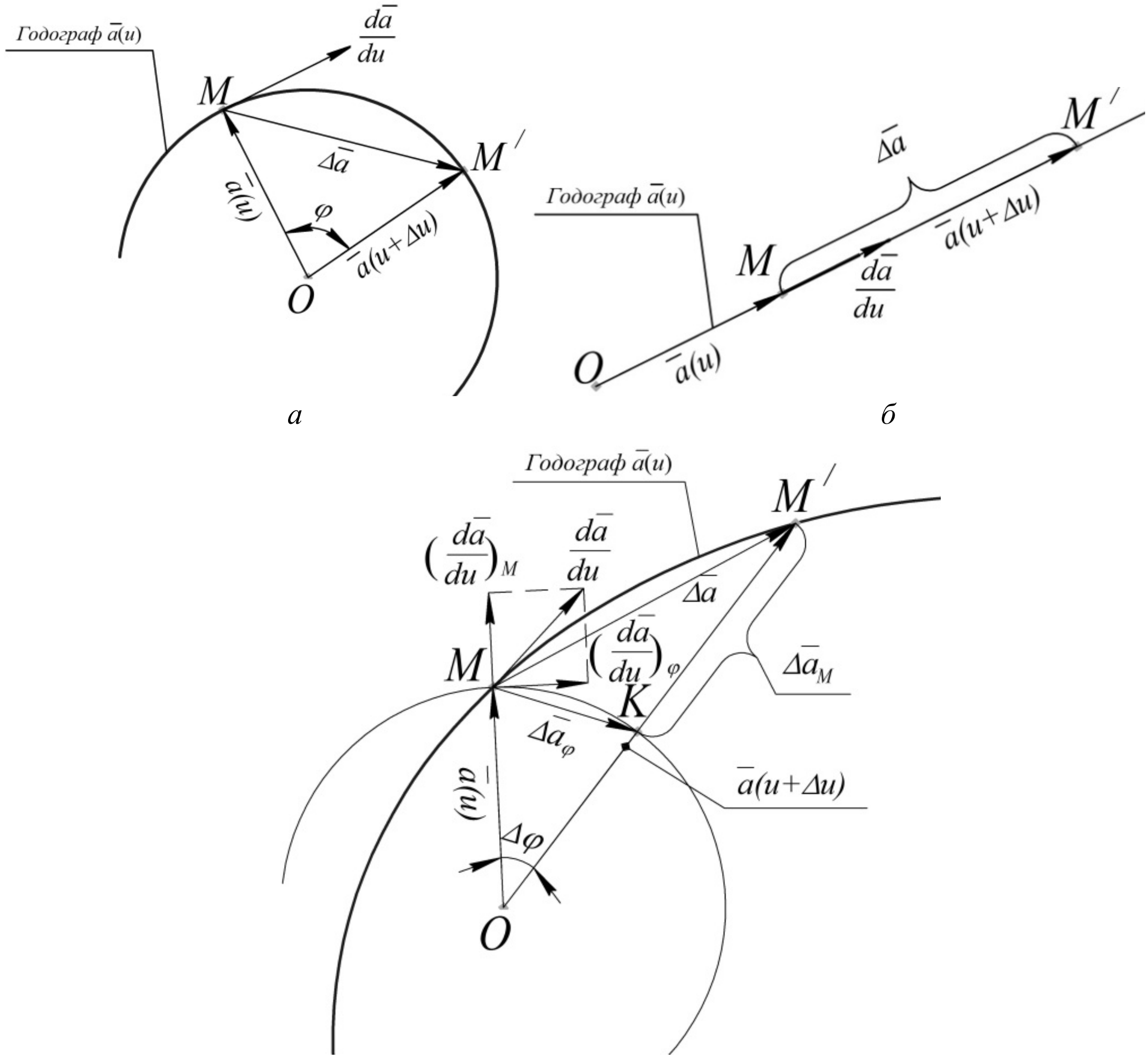

Рис. 1. До визначення похідної векторної функції: а – функція змінюється лише за напрямом; б – функція змінюється лише за модулем; в – функція змінюється одночасно за модулем та напрямом.

Fig. 1. To definition of derivative vector function: a - the function changes only in the direction; b - the function changes only by module; c - the function changes simultaneously in module and direction.

Прийнявши до уваги, що при $\Delta u \to 0$ кут $\Delta\varphi \to 0$, а $=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}=1$,

одержимо

$$\left|\frac{d\bar{a}(u)}{du}\right| = a\cdot\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta u} = a\cdot\omega\,, \qquad (6)$$

де ω – модуль вектора кутової швидкості повертання вектора $\bar{a}(u)$ навколо осі, що проходить через фіксовану точку О простору внаслідок зміни величини аргумента u.

Якщо прийняти до уваги, що швидкість обертання вектора $\overline{a}(u)$ крім величини характеризується і певним напрямом, то є доцільним розглядати кутову швидкість повертання як вектор $\overline{\omega}$, який визначає величину і напрям повертання вектора $\overline{a}(u)$.

Вектор кутової швидкості $\overline{\omega}$ спрямований вздовж осі, яка проходить через фіксовану точку *O* простору і перпендикулярний площині в якій відбувається зміна напряму вектора $\overline{a}(u)$, і спрямований в той бік, звідки, якщо дивитись назустріч цьому векторові, будемо спостерігати повертання вектора $\overline{a}(u)$ внаслідок змінювання аргумента u проти руху годинникової стрілки. Отже, кут між вектором $\overline{\omega}$ та вектором $\overline{a}(u)$ дорівнює 90°. Тоді права частина рівняння (6) є модулем векторного добутку

$$\left|\overline{\omega}\times\overline{a}(u)\right| = \omega\cdot a\cdot\sin 90^{\circ} = \omega\cdot a\,. \tag{7}$$

Звідси висновок: вектор похідної векторної функції $\overline{a}(u)$, яка змінюється лише за напрямом, по скалярному аргументу визначається рівністю

$$\frac{d\overline{a}(u)}{du} = \overline{\omega}\times\overline{a}(u)\,. \tag{8}$$

Отже, *похідна векторної функції, яка змінюється за напрямом і є сталою за модулем, по скалярному аргументу є вектор, який дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості повертання вектора функції* $\overline{a}(u)$ *при змінюванні скалярного аргумента* u *на векторну функцію* $\overline{a}(u)$.

За своїм змістом формула (8) відповідає відомій формулі Л. Ейлера для визначення швидкостей точок твердого тіла при обертальному його русі, в якій векторною функцією скалярного аргумента є радіус-вектор точки тіла.

У випадку, коли вектор функції змінюється лише за модулем і є сталим за напрямом (див. рис. 1, б), годографом функції $\overline{a}(u)$ є пряма лінія, що проходить через фіксовану точку *O*. Вздовж годографа функції в бік зростання аргумента буде спрямований вектор приросту функції $\Delta\overline{a}(u)$. *Вектор похідної векторної функції, яка змінюється лише за модулем, визначається згідно з рівнянням* (2) *і є спрямованим вздовж годографа векторної функції* $\overline{a}(u)$ *в бік зростання аргумента.*

Модуль похідної векторної функції в даному випадку дорівнює

$$\left|\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right| = \frac{da(u)}{du}\,. \tag{9}$$

У випадку, коли векторна функція скалярного аргумента одночасно змінюється за модулем і напрямом (див. рис. 1, в), годографом такої функції може бути випукла або угнута відносно фіксованої точки крива лінія або пряма лінія, що не проходить через фіксовану точку простору.

Розглянемо випадок, коли годографом векторної функції є випукла крива.

Нехай точка *M* годографа функції $\overline{a}(u)$ відповідає деякому значенню аргумента u, а точка M/ годографа значенню аргумента $u+\Delta u$. Нехай при цьому приріст аргумента $\Delta u > 0$. Приріст $\Delta\overline{a}$ вектора функції $\overline{a}(u)$ буде спрямований вздовж січної *MM/* в бік зростання аргумента.

Як видно з рис. 1, в, приріст $\Delta\overline{a}$ векторної функції $\overline{a}(u)$ в будь-якій точці її годографа може бути представлений геометричною сумою приросту векторної функції при її змінюванні лише за напрямом при сталому модулі $\Delta\overline{a}\left(u\right)_{\varphi}$ та приросту векторної функції при її змінюванні лише за модулем при сталому напрямі $\Delta\overline{a}\left(u\right)_{M}$

$$\Delta\overline{a}\left(u\right)=\Delta\overline{a}\left(u\right)_{\varphi}+\Delta\overline{a}\left(u\right)_{M}. \tag{10}$$

Тоді згідно з рівнянням (2) похідна векторної функції по скалярному аргументу прийме вигляд

$$\frac{d\overline{a}\left(u\right)}{du}=\lim\nolimits_{\Delta u\to 0}\frac{\overline{a}\left(u\right)}{\Delta u}=\lim\nolimits_{\Delta u\to 0}\frac{\overline{a}\left(u\right)_{\varphi}}{\Delta u}+\lim\nolimits_{\Delta u\to 0}\frac{\overline{a}\left(u\right)_{M}}{\Delta u}.$$

Звідси наслідок

$$\frac{d\overline{a}\left(u\right)}{du}=\frac{d\overline{a}\left(u\right)_{\varphi}}{du}+\frac{d\overline{a}\left(u\right)_{M}}{du}. \tag{11}$$

Отже, *в загальному випадку, коли вектор функції скалярного аргумента одночасно змінюється за напрямом та величиною, вектор її похідної по скалярному аргументу* $\frac{d\overline{a}\left(u\right)}{du}$ *є геометричною сумою вектора похідної цієї функції при її змінюванні лише за напрямом при сталому модулі* $\frac{d\overline{a}\left(u\right)_{\varphi}}{du}$ *і вектора похідної цієї функції при її змінюванні лише за модулем та сталому напрямі* $\frac{d\overline{a}\left(u\right)_{M}}{du}$.

Вектор $\frac{d\overline{a}\left(u\right)}{du}$ характеризує швидкість змінювання за модулем та напрямом вектора функції $\overline{a}\left(u\right)$ спрямований по дотичній до годографа в бік, що відповідає зростанню аргумента.

Вектор $\frac{d\overline{a}\left(u\right)_{\varphi}}{du}$ характеризує швидкість змінювання напряму вектора векторної функції $\overline{a}\left(u\right)$ при незмінному модулі і спрямований по дотичній до годографа функції, що змінюється лише за напрямом, в бік, що відповідає зростанню аргумента.

Вектор $\frac{d\overline{a}\left(u\right)_{M}}{du}$ характеризує швидкість змінювання модуля вектора векторної функції $\overline{a}\left(u\right)$ при сталому напрямі і спрямований вздовж вектора векторної функції в напрямі його зростання.

Підставивши значення похідної векторної функції по скалярному аргументу при змінюванні її вектора лише за напрямом при незмінному модулі (8) в рівняння (11) одержимо

$$\frac{d\overline{a}\left(u\right)}{du}=\overline{\omega}\times\overline{a}\left(u\right)+\frac{d\overline{a}\left(u\right)_{M}}{du}. \tag{12}$$

Розглянемо більш складний випадок диференціювання векторних функцій скалярного аргумента.

Нехай в деякій точці простору відбувається механічне явище, яке характеризується деякою векторною функцією $\overline{a}\left(u\right)$ і яке фіксується в двох системах відліку: в рухомій системі, де це явище відбувається безпосередньо, яку будемо називати відносною і в системі, яку приймаємо за нерухому і відносно якої здійснює рух рухома.

Швидкість змінювання векторної функції $\overline{a}\left(u\right)$ відносно рухомої системи відліку будемо називати відносною похідною і позначати $\left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_r$, а відносно нерухомої системи відліку будемо називати абсолютною похідною векторної функції по скалярному аргументу і позначати $\left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_a$. Установимо залежність між абсолютною та відносною похідними векторної функції скалярного аргумента.

Швидкість змінювання векторної функції відносно рухомої системи відліку не залежить від руху цієї системи відліку відносно нерухомої. Отже відносна похідна векторної функції по скалярному аргументу згідно з рівнянням (12) буде мати вигляд

$$\left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_r = \overline{\omega}_r \times \overline{a}(u) + \frac{d\overline{a}(u)_M}{du}, \tag{13}$$

де $\overline{\omega}_r$ – вектор кутової швидкості повертання вектора функції $\overline{a}(u)$ у відносній (рухомій) системі відліку.

Розглянемо тепер абсолютну похідну векторної функції $\overline{a}(u)$. Враховуючи, що на величину модуля векторної функції $\overline{a}(u)$ зміна положення рухомої системи відліку відносно нерухомої не впливає, а на величину змінювання напряму даної векторної функції додатково вплине лише кутова швидкість обертання тіла відліку рухомої системи запишемо похідну векторної функції $\overline{a}(u)$ відносно нерухомої системи відліку

$$\left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_a = \overline{\omega}_r \times \overline{a}(u) + \frac{d\overline{a}(u)_M}{du} + \overline{\omega}_e \times \overline{a}(u), \tag{14}$$

де $\overline{\omega}_e$ – вектор кутової швидкості обертання тіла відліку рухомої системи відносно миттєвої осі, що проходить через початок відліку рухомої системи.

Тоді з урахуванням рівняння (13) одержимо рівняння, яке виражає абсолютну похідну векторної функції по скалярному аргументу

$$\left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_a = \left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_r + \overline{\omega}_e \times \overline{a}(u). \tag{15}$$

Таким чином безкоординатним методом одержана формула Бура, з якої випливає, що абсолютна похідна векторної функції скалярного аргумента дорівнює векторній сумі відносної похідної цієї функції та векторного добутку кутової швидкості обертання рухомої системи відліку (тіла відліку) на вектор, який диференціюють.

Якщо фізичне явище, яке характеризується деякою векторною функцією $\overline{a}(u)$ і яке фіксується крім нерухомої в декількох рухомих системах відліку, які матимуть свої тіла відліку, кожне з яких буде мати свій вектор кутової швидкості обертання відносно своєї миттєвої осі $\overline{\omega}_{ei}$, то абсолютна похідна векторної функції $\overline{a}(u)$ прийме вигляд

$$\left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_a = \left(\frac{d\overline{a}(u)}{du}\right)_r + \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_{ei} \times \overline{a}(u). \tag{16}$$

Нижче наведені доведення деяких теоретичних положень, які виконані на основі запропонованого методу диференціювання векторних функцій скалярного аргумента.

Розглянемо обертальний рух твердого тіла G навколо нерухомої осі AB (рис. 2) і визначимо швидкість та прискорення точок тіла при його обертанні. Як відомо, при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі всі точки тіла крім точок осі обертання рухаються по колових траєкторіях з центром на осі обертання.

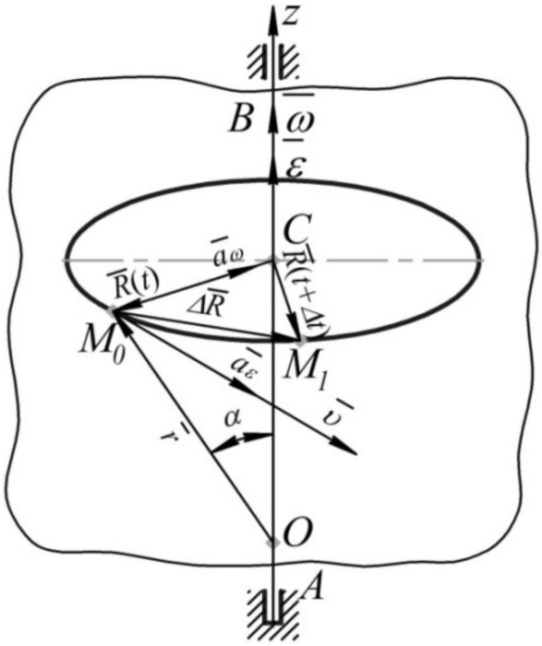

Рис. 2. До визначення швидкості та прискорення точок твердого тіла.
Fig. 2. To determine the speed and acceleration points of a solid body.

Розглянемо довільну точку *M* тіла, що знаходиться на відстані *R* від осі обертання. Нехай в деяку мить часу точка знаходилась на траєкторії в положенні M_0, а через проміжок часу в положенні M_1. Проведемо з нерухомої точки *C* на осі обертання радіуси вектори $\bar{R}(t)$ та $\bar{R}(t+\Delta t)$ в точки M_0 та M_1 відповідно. Як видно з рис. 2, радіус вектор $\bar{R}(t)$ є векторною функцією скалярного аргумента *t*, який змінюється лише за напрямом. Скористуємось поняттям вектора кутової швидкості обертання тіла навколо нерухомої осі $\bar{\omega}$, який відкладається від будь-якої точки на осі обертання тіла і спрямований в той бік, звідки обертання тіла спостерігається проти годинникової стрілки. Тоді згідно з залежністю (8) обертальна швидкість точки *M* дорівнює

$$\bar{\upsilon}(t)=\frac{dR(t)}{dt}=\bar{\omega}\times\bar{R}(t). \tag{17}$$

Згідно з властивостями векторного добутку вектор обертальної швидкості буде спрямований по дотичній до годографа векторної функції $\bar{R}(t)$ в той бік, звідки поворот вектора першого співмножника до другого на найменший кут буде спостерігатись проти руху годинникової стрілки (див. рис. 2). Модуль вектора швидкості дорівнює

$$|\bar{\upsilon}|=\omega\cdot R\cdot\sin\left(\widehat{\bar{\omega};\bar{R}}\right)=\omega\cdot R\cdot\sin 90^\circ=\omega\cdot R. \tag{18}$$

Якщо за фіксовану точку на осі обертання приймемо іншу точку *O*, з якої проведемо радіус-вектор $\bar{r}$ в рухому точку M_0, то згідно з (8) обертальна швидкість буде дорівнювати

$$\bar{\upsilon}(t)=\bar{\omega}\times\bar{r}.$$

Модуль швидкості при цьому буде визначатись рівнянням

$$|\bar{\upsilon}|=\omega\cdot r\cdot\sin\left(\widehat{\bar{\omega};\bar{r}}\right)=\omega\cdot r\cdot\sin\alpha. \tag{19}$$

З ΔOM_0C визначимо модуль радіуса-вектора $|\overline{r}|$

$$r = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

Підставивши це значення в (19)

$$|\overline{\upsilon}| = \omega \cdot \frac{R}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha = \omega \cdot R \ . \qquad (20)$$

Отже модуль швидкості довільної точки твердого тіла при його обертанні навколо нерухомої осі дорівнює добуткові модуля кутової швидкості обертання тіла на її відстань від осі його обертання.

Як відомо, прискорення точки визначається першою похідною від вектора швидкості точки за часом згідно з рівністю

$$\overline{a}(t) = \frac{d\overline{\upsilon}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overline{\omega} \times \overline{R}(t)\right) = \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{R}(t) + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{R}(t)}{dt}. \qquad (21)$$

Враховуючи, що вектор $\overline{R}(t)$ змінюється лише за напрямом, а $\frac{d\overline{\omega}}{dt} = \overline{\varepsilon}$, одержимо

$$\overline{a}(t) = \overline{\varepsilon} \times \overline{R}(t) + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{R}(t)\right) = \overline{\varepsilon} \times \overline{R}(t) + \overline{\omega} \times \overline{\upsilon}(t). \qquad (22)$$

Згідно з властивостями векторного добутку перша складова в правій частині рівняння (22) є вектор, який спрямований по дотичній до годографа функції $\overline{R}(t)$ вздовж вектора обертальної швидкості (див. рис. 2) і називається обертальним прискоренням

$$\overline{a}_\varepsilon = \overline{\varepsilon} \times \overline{R}(t). \qquad (23)$$

Друга складова прискорення в правій частині рівняння (22) є вектор який спрямований вздовж радіуса R годографа функції $\overline{R}(t)$ до осі обертання тіла (див. рис. 2) і називається доосьовим прискоренням

$$\overline{a}_\omega = \overline{\omega} \times \overline{\upsilon}(t). \qquad (24)$$

Модулі обертального та доосьового прискорень точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі дорівнюють

$$a_\varepsilon = \varepsilon \cdot R \cdot \sin 90^\circ = \varepsilon \cdot R\,; \qquad (25)$$

$$a_\omega = \omega \cdot \upsilon \cdot \sin 90^\circ = \omega \cdot \upsilon = \omega \cdot \omega \cdot R = \omega^2 R. \qquad (26)$$

Звідси висновки:

1) модуль обертального прискорення точки тіла при його обертанні навколо нерухомої осі дорівнює добуткові модуля кутового прискорення тіла на відстань точки від осі обертання;

2) модуль доосьового прискорення точки тіла при його обертанні навколо нерухомої осі дорівнює добуткові квадрата модуля кутової швидкості тіла на відстань точки від осі обертання.

Розглянемо рух точки M, яка рухається відносно тіла G, з яким незмінно зв'язана рухома система координат $Oxyz$ і яке в свою чергу рухається певним способом відносно іншої системи координат $O_ax_ay_az_a$, яку приймаємо за базову (умовно вважаємо нерухомою). Нехай положення рухомої точки M відносно початку рухомої системи координат визначимо радіусом-вектором $\overline{\rho}$, положення початку рухомої системи координат (точки O) відносно початку нерухомої системи координат – радіусом-вектором $\overline{r}_0$, а положення рухомої точки M відносно початку нерухомої системи координат – радіусом-вектором $\overline{r}$. В загальному випадку радіуси-вектори $\overline{\rho}$, $\overline{r}_0$ та $\overline{r}$ з часом можуть змінювати свій модуль та напрям в просторі, тобто є векторними функціями скалярного аргумента t.

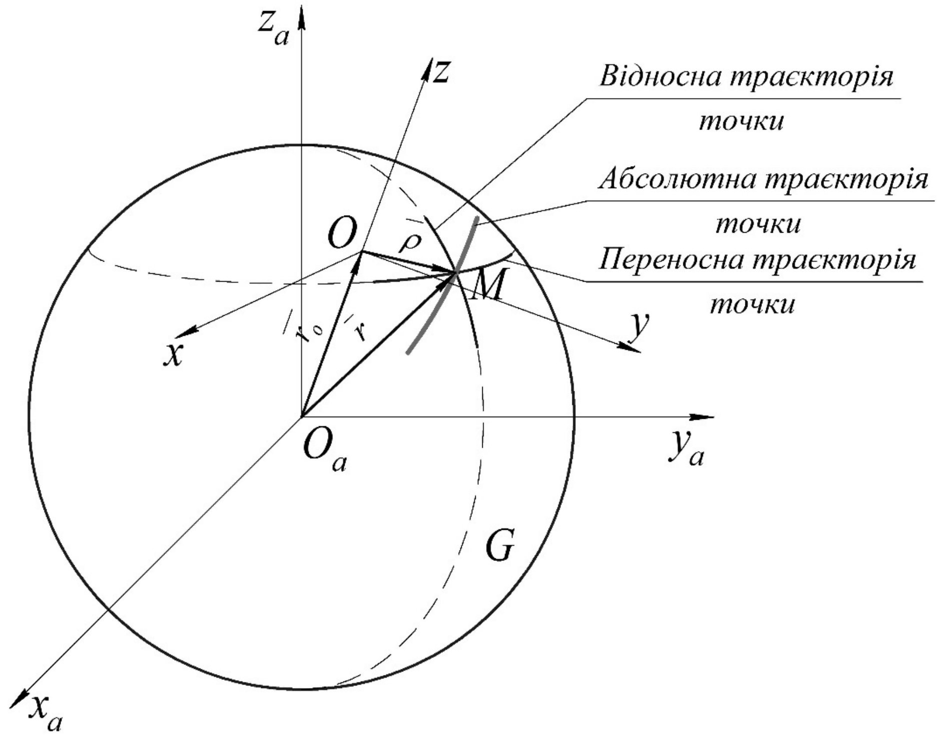

Рис. 3. До теореми про складання швидкостей та прискорень при складному русі точки
Fig. 3. To the theorem on the addition of speeds and accelerations in complex motion of a point

Як видно з рис. 3 під час всього руху точки буде вірна залежність

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{\rho}\,, \tag{27}$$

де векторна функція $\bar{r}_0$ змінює свій напрям і модуль в нерухомій системі відліку, векторна функція $\bar{\rho}$ змінює свій напрям і модуль відносно рухомої системи відліку, яка зв'язана з тілом G, і змінює свій напрям відносно нерухомої системи відліку внаслідок обертання тіла G навколо миттєвої осі OP з деякою кутовою швидкістю $\bar{\omega}_e$.

Визначимо абсолютну швидкість точки M

$$\bar{\upsilon}_a = \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\bar{r}_0}{dt}\right)_a + \left(\frac{d\bar{\rho}}{dt}\right)_a. \tag{28}$$

Вектор похідної $\dfrac{d\bar{r}_0}{dt}$ є швидкістю точки O – початку рухомої системи координат відносно нерухомої

$$\frac{d\bar{r}_0}{dt} = \bar{\upsilon}_0. \tag{29}$$

Вектор $\left(\dfrac{d\bar{\rho}}{dt}\right)_a$ – абсолютна похідна векторної функції $\bar{\rho}$ за часом, яка згідно з формулою (15) дорівнює

$$\left(\frac{d\bar{\rho}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\bar{\rho}}{dt}\right)_r + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho} = \bar{\upsilon}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}\,. \tag{30}$$

де $\overline{\omega}_e \times \overline{\rho}$ – обертальна швидкість тієї точки тіла *G*, де в дану мить знаходяться рухома точка *M*, навколо миттєвої осі, що проходить через точку *O*.

Після підстановки (29) і (30) в рівняння (28) одержимо

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_0 + \overline{\upsilon}_r + \overline{\omega}_e \times \overline{\rho} . \qquad (31)$$

В рівнянні (31) векторна сума $\overline{\upsilon}_0 + \overline{\omega}_e \times \overline{\rho}$ є швидкістю точки тіла *G*, де в дану мить часу знаходиться рухома точка *M*, і є для неї переносною швидкістю

$$\overline{\upsilon}_e = \overline{\upsilon}_0 + \overline{\omega}_e \times \overline{\rho} . \qquad (32)$$

Тоді рівняння (31) з урахуванням (32) прийме вигляд

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_e + \overline{\upsilon}_r . \qquad (33)$$

Одержана рівність виражає теорему про складання швидкостей при складному русі точки: *абсолютна швидкість точки при складному її русі дорівнює геометричній сумі переносної та відносної швидкостей.*

Визначимо прискорення точки *M* продиференціювавши за часом векторну функцію її швидкості у вигляді (31)

$$\overline{a}_a = \frac{d\overline{\upsilon}_a}{dt} = \frac{d\overline{\upsilon}_0}{dt} + \frac{d\overline{\omega}_e}{dt} \times \overline{\rho} + \overline{\omega}_e \times \left(\frac{d\overline{\rho}}{dt}\right)_a + \left(\frac{d\overline{\upsilon}_r}{dt}\right)_a . \qquad (34)$$

Згідно з рівнянням (15) визначимо абсолютні похідні векторних функцій $\overline{\rho}$ та $\overline{\upsilon}_r$

$$\left(\frac{d\overline{\rho}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\overline{\rho}}{dt}\right)_r + \overline{\omega}_e \times \overline{\rho} = \overline{\upsilon}_r + \overline{\omega}_e \times \overline{\rho} , \qquad (35)$$

$$\left(\frac{d\overline{\upsilon}_r}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\overline{\upsilon}_r}{dt}\right)_r + \overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r = \overline{a}_r + \overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r . \qquad (36)$$

Підставивши значення абсолютних похідних векторних функцій $\overline{\rho}$ та $\overline{\upsilon}_r$ в рівняння (34) та прийнявши до уваги, що похідна від швидкості точки *O* за часом є її прискоренням $\frac{d\overline{\upsilon}_0}{dt} = \overline{a}_0$, а похідна від кутової швидкості є кутовим прискоренням $\frac{d\overline{\omega}_e}{dt} = \overline{\varepsilon}_e$, одержимо

$$\overline{a}_a = \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon}_e \times \overline{\rho} + \overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r + \overline{\omega}_e \times \left(\overline{\omega}_e \times \overline{\rho}\right) + \overline{a}_r + \overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r . \qquad (37)$$

Так як векторна сума $\overline{a}_0 + \overline{\varepsilon}_e \times \overline{\rho} + \overline{\omega}_e \times \left(\overline{\omega}_e \times \overline{\rho}\right)$ є повним прискоренням тієї точки тіла *G*, де в дану мить знаходиться рухома точка *M*, для якої це прискорення є переносним прискоренням

$$\overline{a}_e = \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon}_e \times \overline{\rho} + \overline{\omega}_e \times \left(\overline{\omega}_e \times \overline{\rho}\right), \qquad (38)$$

а подвійний векторний добуток $2\left(\overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r\right)$ є коріолісовим (поворотним) прискоренням $\overline{a}_c = 2\left(\overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r\right)$, то рівняння (37) прийме вигляд

$$\overline{a}_a = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_c . \qquad (39)$$

Остання рівність виражає теорему про складання прискорень при складному русі точки: *абсолютне прискорення точки при складному її русі дорівнює векторній сумі переносного, відносного та коріолісового прискорень.*

3. Висновки

На основі аналізу властивостей векторних функцій скалярного аргумента їх годографів і математичних операцій над векторними функціями розроблено безкоординатний метод їх диференціювання, який має ряд переваг в порівнянні з координатним та наведено приклади його застосування.

Розроблений метод є наочно переконливим і доцільним для використання в навчальному процесі при вивченні дисципліни «Теоретична механіка».

Список використаної літератури:

1. Мельникова Н. В. Основы векторного анализа. Интегралы в теории поля / Н. В. Мельникова, Ю. Б. Мельников, Ю. Ю. Мельникова. – Екатеринбург: ГОУ ВПО «УГТУ – УПИ», 2006. 152 с. – Режим доступу: https://study.urfu.ru/Aid/Publication/368/1/Melnikovs_Vect_analis.pdf .
2. Гриньов Б. В. Векторна алгебра: підруч. для техн. ВНЗ / Б. В. Гриньов, І. К. Кириченко. За ред. О. М. Литвина. – Харків: Гімназія, 2008. – 164 с. – Режим доступу: http://www.e-catalog.name/x/x/x?LNG=&Z21ID=&I21DBN=VGPU_PRINT&P21DBN=VGPU&S21STN=1&S21REF=&S21FMT=fullw_print&C21COM=S&S21CNR=&S21P01=0&S21P02=1&S21P03=A=&S21STR=%D0%93%D1%80%D0%B8%D0%BD%D1%8C%D0%BE%D0%B2,%20%D0%91%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%81%20%D0%92%D1%96%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87 .
3. Элементы векторного анализа. Электронное учебное пособие. Составители: Галеев А. А., Червиков Б. Г. – Казань: Казанский государственный университет, 2009. – Режим доступу: https://old.kpfu.ru/f3/bin_files/el-v!209.pdf .
4. Малышев А. И. Основы векторного и тензорного анализа для физиков. Электронное учебно-методическое пособие / А. И. Малышев, Г. М. Максимова. – Нижнегородский университет, 2012. – 101 с. – Режим доступу: https://zzapomni.com/urfu-ekaterinburg/melnikova-osnovy-vektornogo-analiza-2006-17977/view .
5. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики, т. 1 (кинематика, статика, динамика точки) / Н. А. Кильчевский. Изд. 2-е. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука». 1977 г., 480 с. – Режим доступу: http://mechmath.ipmnet.ru/lib/?to=search&s_s1=%CA%E8%EB%FC%F7%E5%E2%F1%EA%E8%E9&submit_search=%C8%F1%EA%E0%F2%FC .
6. Павловский М. А. Теоретическая механика. Статика. Кинематика / М. А. Павловский, Л. Ю. Акинфиева, О. Ф. Бойчук; под ред. М. А. Павловского. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1989. – 351 с. – Режим доступу: https://www.studmed.ru/download/pavlovskiy-ma-teoretichna-mehanka-ukr_b09eb95a413.html .
7. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. Учеб. для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов 5-е изд. перераб. и доп. / Н. Н. Никитин. – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с. – Режим доступу: https://www.for-stydents.ru/teoreticheskaya-mehanika/uchebniki/nikitin-kurs-teoreticheskoy-mehaniki .
8. Токар А. М. Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі. Навч. посібник / А. М. Токар. – К.: Либідь, 2001. – 416 с. – Режим доступу: http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?Z21ID=&I21DBN=EC&P21DBN=EC&S21STN=1&S21REF=10&S21FMT=JwU_B&C21COM=S&S21CNR=20&S21P01=0&S21P02=0&S21P03=U=&S21COLORTERMS=0&S21STR=%D0%92212%20%D1%8F73 .
9. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики. В двух томах / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 736 с. – Режим доступу: https://www.studmed.ru/download/butenin-kurs-teoreticheskoy-mehaniki-v-dvuh-tomah_663ca50eb60.html .
10. Павловский М. А. Теоретическая механика / М. А. Павловский, – Киев: Техника,

2002. – 510 с. – Режим доступу: http://btpm.nmu.org.ua/ua/download/Павловський%20М.А.%20Теоретична%20механіка.pdf .
11. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. Учебник. 9-е изд. стер. / С. М. Тарг. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 768 с. – Режим доступу: https://fileskachat.com/download/49922_c08fcc3fbfcda612dcd3f982250b5e4d.html .
12. Бондаренко А. А., Дубінін О. О., Переяславцев О. М. Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. – Ч. 1: Статика. Кінематика. – К.: Знання, 2004. – 599 с. – (Вища освіта XXI століття). – Режим доступу: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Bondarenko_P1_2004_599.pdf .
13. Дронг В. И. Курс теоретической механики. Учебник для вузов / В.И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин и др. Под общей ред. К. С. Колесникова. 3-е изд. стереотип. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 736 с. – Режим доступу: http://static.flibusta.site/b.usr/Drong_Kurs-teoreticheskoy-mehaniki.512266.djvu .
14. Гулівець О. А. Векторні функції скалярного аргументу при дослідженнях кінематики точки та твердого тіла / О. А. Гулівець, С. Ю. Олійник, Г. А. Маркевич // Вісник Черкаського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2017. – № 1. – С. 138-146. – Режим доступу: http://www.google.com.ua/url?url=http://phys-ejournal.cdu.edu.ua/article/download/2397/2468&rct=j&q=&esrc=s&sa=U&ved=0ahUKEwjs2d2K2JvlAhWa7KYKHbMeCJI4ChAWCEEwCQ&usg=AOvVaw0tn8TsJCb7oP8-wIiAV6La .

References:

1. Melnikova H. V., Melnikov Y. B., Melnikova Y. Y. (2006). *Basics of vector analysis. Integrals in field theory*. Ekaterinburh: GOU VPO «UGTU - UPE» (in Russ.) Retrieved from: https://study.urfu.ru/Aid/Publication/368/1/Melnikovs_Vect_analis.pdf .
2. Gryniov B. V., Kyrychenko I. K. Ed. Lytvyn O. M. (2008). *Vector algebra: textbook for technical universities.* Kharkiv: Gymnasium (in Ukr.) Retrieved from: http://www.e-catalog.name/x/x/x?LNG=&Z21ID=&I21DBN=VGPU_PRINT&P21DBN=VGPU&S21STN=1&S21REF=&S21FMT=fullw_print&C21COM=S&S21CNR=&S21P01=0&S21P02=1&S21P03=A=&S21STR=%D0%93%D1%80%D0%B8%D0%BD%D1%8C%D0%BE%D0%B2,%20%D0%91%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%81%20%D0%92%D1%96%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87 .
3. Galeeva A. A., Chervikov B. G. (2009). *Elements of vector analysis. Electronic study guide.* Kazan: Kazan National University (in Russ.) Retrieved from: https://old.kpfu.ru/f3/bin_files/el-v!209.pdf .
5. Malyshev A. I., Maksimova G. M. (2012). *Fundamentals of vector and tensor analysis for physicists*. Electronic teaching aid. Nizhny Novgorod University (in Russ.) Retrieved from: https://zzapomni.com/urfu-ekaterinburg/melnikova-osnovy-vektornogo-analiza-2006-17977/view .
6. Kilchevski N. A. (1977). *The course of theoretical mechanics, Volume 1 (kinematics, statics, point dynamics)*. Ed. 2nd. Main edition of the physics and mathematics literature of the publishing house «Nauka», Moscow (in Russ.) Retrieved from: http://mechmath.ipmnet.ru/lib/?to=search&s_s1=%CA%E8%EB%FC%F7%E5%E2%F1%EA%E8%E9&submit_search=%C8%F1%EA%E0%F2%FC .
7. Pavlovski M. A., Akinfieva L. Y., Boichuk O. F.; Edited by Pavlovski M. A. (1989). *Theoretical mechanics. Statics. Kinematics*. Kyiv: Vyshcha shkola, Main Publishing House (in Ukr.) Retrieved from: https://www.studmed.ru/download/pavlovskiy-ma-teoretichna-mehanka-ukr_b09eb95a413.html .
8. Nikitin N. P. (1990). *The course of theoretical mechanics.* Textbook. For engineering and

instrument-making specialties Universities 5th edition revised and enlarged. Moscow: Vysshaia shkola (in Russ.) Retrieved from: https://www.for-stydents.ru/teoreticheskaya-mehanika/uchebniki/nikitin-kurs-teoreticheskoy-mehaniki .
9. Tokar A.M. (2001). *Theoretical mechanics. Kinematics. Methods and tasks.* Teaching Manual. Kyiv: Lybid (in Ukr.) Retrieved from: http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?Z21ID=&I21DBN=EC&P21DBN=EC&S21STN=1&S21REF=10&S21FMT=JwU_B&C21COM=S&S21CNR=20&S21P01=0&S21P02=0&S21P03=U=&S21COLORTERMS=0&S21STR=%D0%92212%20%D1%8F73 .
10. Butenin N. V., Lunts Y. L., Merkin D. R. (2002). *The course of theoretical mechanics.* In two volumes. St. Petersburg.: Publishing House «Lan» (in Russ.) Retrieved from: https://www.studmed.ru/download/butenin-kurs-teoreticheskoy-mehaniki-v-dvuh-tomah_663ca50eb60.html .
11. Pavlovski M. A. (2002). *Theoretical mechanics*. Kyiv: Tehnika (in Ukr.) Retrieved from: http://btpm.nmu.org.ua/ua/download/Павловський%20М.А.%20Теоретична%20механіка.pdf .
12. Targ S. M. (2002). *Short course in theoretical mechanics.* Textbook. 9th Edition. St. Petersburg.: Publishing House «Lan» (in Russ.) Retrieved from: https://fileskachat.com/download/49922_c08fcc3fbfcda612dcd3f982250b5e4d.html .
13. Bondarenko A. A., Dubinin O. O., Pereiaslavtsev O. M. (2004). *Theoretical mechanics. Textbook in 2 Volumes – Volume 1. Static. Kinematics.* Kyiv: Znannia (in Ukr.) Retrieved from: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Bondarenko_P1_2004_599.pdf .
14. Drong V. I., Dubinin B. B., Ilin M. M. and others. Under general edition by Kolesnikova K. S. (2005). *Theoretical mechanics course*. Textbook for high schools. 3rd Edition. Moscow: Publishing House MGTU named after E.E. Bauman (in Russ.) Retrieved from: http://static.flibusta.site/b.usr/Drong_Kurs-teoreticheskoy-mehaniki.512266.djvu .
15. Gulivets O. A., Oliinyk S. Y., Markevych G. A. (2017). Vector functions of the scalar argument in the study of point kinematics and solids. *Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia fizyko-matematychni nauky (Bulletin of Cherkasy University. Series of Physics and Mathematics)*, 1, 138-146. Retrieved from: http://www.google.com.ua/url?url=http://phys-ejournal.cdu.edu.ua/article/download/2397/2468&rct=j&q=&esrc=s&sa=U&ved=0ahUKEwjs2d2K2JvlAhWa7KYKHbMeCJI4ChAWCEEwCQ&usg=AOvVaw0tn8TsJCb7oP8-wIiAV6La.

O. A. Gulivets
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mechanics and General Engineering, Mechanical Engineering Faculty, Kryvyi Rih National University

S. Y. Oliinyk
Assistant Professor, Department of Applied Mechanics and General Engineering, Mechanical Engineering Faculty, Kryvyi Rih National University,
oleynic.sveta@gmail.com

NON-COORDINATE METHOD OF DIFFERENTIALIZATION OF VECTOR FUNCTIONS OF THE SCALARY ARGUMENT

Summary. *Purpose. The purpose of this paper is to develop a coordinate-free (vector) method for differentiating vector functions of a scalar argument.*

Methodology is. Based on the representation of the increment of the vector function of *the scalar argument, which simultaneously changes in direction vector and modulus, as the sum of the increment due to the change in direction and increment due to the change in its modulus, mathematical dependencies are obtained for coordinate-free vector functions of the scalar argument that describe the mechanical phenomena occurring in the fixed and moving reference systems.*

Results. In theoretical mechanics, the methods of vector algebra and vector analysis are widely used. Vector calculus due to the compactness and physical clarity of vector formulas has a great advantage over the coordinate method. In modern conditions of higher education, when the number of hours for classroom training is rapidly decreasing, there is an urgent need for studying theoretical mechanics to apply such methods of performing mathematical operations on vector quantities that would convincingly and with little time consumption allow to carry out proofs of certain theoretical positions. As you know, there are two methods for performing mathematical operations on vector quantities: coordinate-free one (or vector), when operations are performed directly on vectors, and coordinate one, in which operations are performed on scalar values that analytically express a vector in a certain coordinate system. The coordinate-free method is more compact and should be used when conducting theoretical studies. Based on the hodograph analysis of the vector function of a scalar argument, the vector which simultaneously changes in direction and modulo it has been established that the increment vector of this function when the scalar argument changes is equal to the geometric sum of the increment of this function due to the change in the direction of its vector and the increment resulting from functions. Based on this, it was found that the vector of the derivative of the function of a scalar argument consists of two components: the vector of the derivative, which characterizes the rate of change in the direction of the vector of the function and the vector of the derivative, which characterizes the change in the modulus of the vector. The paper also considers the case of differentiation by the coordinate method of the scalar argument function, which characterizes a mechanical phenomenon that occurs in a certain frame of reference, which moves relative to other frames of reference, one of which is taken as fixed. It has been established that the absolute derivative of the vector function of the scalar argument in this case depends on the angular velocity of rotation of the moving reference systems and the dependence that characterizes this relationship.

Originality. The developed coordinate-free method for differentiating the vector functions of a scalar argument, the vector of which simultaneously changes in direction and modulo, which is based on the analysis of the properties of the hodograph of the function, is original.

Practical value. ApplicationsThe use of the developed coordinate-free method for differentiating the vector functions of the scalar argument can be used in the educational process and can makes it possible to carry out the proofs of a number of theoretical positions on the subject "Theoretical Mechanics" more convincingly and with less time consumption (see References 14, figures 3.)

Keywords: vector, function, scalar, argument, hodograph, differentiation, derivative.

Одержано редакцією 01.09.2019
Прийнято до друку 15.10.2019