МАТЕМАТИЧНА ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ФІЗИКА

ORCID: 0000-0003-2297-1062

Г. Ю. Курбет

Магістр, кафедра прикладної математики,
факультет інформаційних і прикладних технологій,
Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна,
annkurbet@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3363-2229

К. О. Буряченко

Кандидат фіз.-мат.наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики,
Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна,
k.buriachenko@donnu.edu.ua

УДК 517.9 PACS 02,03,05,06,07
DOI: 10.31651/2076-5851-2020-65-72

ДОСЛІДЖЕННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ГАЛЬОРКІНА[6]

Робота присвячена розв'язанню оберненої крайової задачі для одновимірного хвильового рівняння з застосуванням та адаптацією методу Гальоркіна. Проблематика цікава з точки зору практичних застосувань цих задач: обернені задачі, на відміну від прямих задач, в яких відомі коефіцієнти рівняння, містять невідому в коефіцієнтах, фізичний зміст якої є швидкість розповсюдження звукової хвилі. Ці задачі доволі актуальні з огляду їх застосувань в томографії, автобудівної промисловості, де потрібно зчитувати сигнал, «звукову хвилю», як зворотній зв'язок на процеси, які відбуваються: тестування автомобілів на граничних швидкостях та вплив опору повітря на кузов, якість зображення при томографії, тощо. Метою роботи є доведення теореми існування розв'язку оберненої задачі для одновимірного хвильового рівняння та адаптація методу Гальоркіна для еволюційних рівнянь.

Ключові слова: обернена задача, еволюційні рівняння, хвильове рівняння, метод Гальоркіна, нелінійні оператори в сепарабельному банахову просторі, слабкий розв'язок, моделювання акустичних процесів.

1. Вступ

Робота присвячена розв'язанню оберненої крайової задачі для одновимірного хвильового рівняння з застосуванням та адаптацією методу Гальоркіна. Проблематика цікава з точки зору практичних застосувань цих задач: часто в практичних цілях потрібно знайти швидкість розповсюдження звукової хвилі. Обернена задача, на відміну від прямої, в якої відомі коефіцієнти, містить невідому в коефіцієнтах, фізичний зміст якої якраз і є шуканою швидкістю розповсюдження хвилі Отже, розв'язання обернених задач полягає в знаходженні швидкості звукової хвилі (чисельному чи аналітичному). В цьому напрямку варто згадати роботи Горбачук В. І. [7], Ліонс Ж. Л. [1], Л. Пестов[10] та Д. Стрельніков [8]. Основні методи даної роботи спираються на ці статті і нашим завданням є застосування та адаптація

[6] Робота виконання в рамках залучення молодих вчених (студентів) до виконання держбюджетних тем МОН, номери держреєстрації 0118U003138, 0119U100421, а також українсько-німецького проекту «From Modeling and Analysis to Approximation".

розроблених в вищезгаданих роботах методів на модельний випадок оберненої задачі Коші-Діріхле для одновимірного хвильового рівняння.

Як відомо, хвильове рівняння описує процес розповсюдження хвилі в просторі. Так, зокрема тривимірні хвильові рівняння моделюють процеси розповсюдження звукових хвиль. Обернені задачі, на відміну від прямих задач, в яких відомі коефіцієнти рівняння, містять невідому в коефіцієнтах, фізичний зміст якої є швидкість розповсюдження звукової хвилі. Ці задачі доволі актуальні з огляду їх застосувань в томографії, автобудівної промисловості, де потрібно зчитувати сигнал, «звукову хвилю», як зворотній зв'язок на процеси, які відбуваються: тестування автомобілів на граничних швидкостях та вплив опору повітря на кузов, якість зображення при томографії, тощо.

Метою роботи є доведення теореми існування розв'язку оберненої задачі для одновимірного хвильового рівняння та адаптація методу Гальоркіна для еволюційних рівнянь.

Розглянемо обернену крайову задачу для хвильового рівняння.

Нехай Ω – обмежена область у $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ з гладкою межею $\partial\Omega$. Нехай $\sum \subset \partial\Omega$ – відкрита множина з гладкою межею. Задача, що називається прямою, є початковою крайовою задачею для хвильового рівняння з крайовими умовами

$$\rho u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ в } (0, l) \times (0, T), \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \;\; u(l, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \frac{du(0,x)}{dt} = u_1(x). \tag{3}$$

Тут $\rho(x) = \frac{1}{c^2(x)}$ – додатня функція, яка пов'язана зі швидкістю звуку: $c(x)$ – швидкість звуку. $f(t) = \big(f_1(t), f_2(t)\big) -$ задана гранична функція. Для простоти розглядаємо першу мішану задачу. Нехай $u^f -$ розв'язок прямої задачі (який, згідно з теорії математичної фізики, існує, єдиний і неперервно залежить від f).

Обернена задача полягає у знаходженні коефіцієнта рівняння $\rho(x)$ по заданій функції u^f.

Згідно з [1] застосуємо метод Гальоркіна для еволюційних рівнянь для розв'язання оберненої задачі (1)-(3). Для лінійних рівнянь розроблено чимало методів розв'язання, в тому числі і чисельних, однак, саме для обернених задач вони не є ефективними. В той час, коли не працюють чисельні методи для лінійних рівнянь, можна застосовувати метод Гальоркіна, який першочергово був розроблений для нелінійних рівнянь, однак, у випадку оберненої задачі він виявився найбільш ефективним та результативним у виконанні. Отже, розглядемо спочатку загальну схему методу Гальоркіна *для будь-якого* оператрного рівняння Au=f.А потім перенесемо цю схему для розв'язання еволюційної оберненої задачі (1)-(3) (див. розділ 3).

2. Метод Галеркіна для стаціонарних нелінійних рівнянь

Розглянемо спочатку класичну версію методу Гальоркіна—для нелінійних еліптичних рівнянь другого порядку, які задається оператором А. Метод Гальоркіна – метод побудови скінченновимірних наближень розв'язку операторного рівняння (Au=f в сепарабельному банаховому просторі X. А саме, доведення складається з наступних етапів [9, с. 98]:

1. Завдяки сепарабельності банахового простору X, існує злічена всюди щільна підмножина $\{v_1, \; v_2, \dots, v_n, \dots\}$ в X. З послідовності $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ виберемо підпослідовність $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ таким чином, щоб будь-який набір $\{w_1, \; w_2, \dots, w_j\}$ був лінійно незалежним для довільного j. Розглянемо рівняння $Au = f$ на скінченновимірному підпросторі $F_j \subset X$: $F_j = \{c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_j w_j, c_k \in \mathbb{R}^1, k = 1,2, \dots, j\}$. Визначимо гальоркінські наближення $u_f = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_j w_j$ як розв'язок системи рівнянь

$$\langle Au_j, w_i \rangle = \langle f, w_i \rangle, i = 1, \dots, j.$$

Доведемо, що для кожного j на F_j існує розв'язок системи.

2. Доведемо обмеженість послідовності $\{u_j\} -$ послідовності гальоркінських наближень розв'язку рівняння $Au = f$, тобто покажемо, що існує $M > 0$ для якого $\|u_j\| \leq M, j = 1,2, \dots$. Також покажемо обмеженість в X^* послідовності $\{Au_j\}_{j=1}^{\infty}$.

3. Доведемо слабку збіжність деякої підпослідовності $\{u_{jk}\}$ послідовності $\{u_j\}$ до деякого елемента $u_0 \in X$.

4. Доведемо, що $u_0 \in X$ − розв'язок операторного рівняння $Au = f$.

Реалізуємо етапи 2-4.

2. Доведемо обмеженість послідовності $\{Au_j\}$ в X^*. Розглянемо $v \in X$: $\|v\| = 1, v' = \delta v$; $\|v'\| = \delta$. Тоді

$$\langle Au_j, v\rangle = \frac{1}{\delta}\langle Au_j, \delta v\rangle = \frac{1}{\delta}\langle Au_j, v'\rangle = \frac{1}{\delta}\langle Au_j - Av' + Av', v' - u_j + u_j\rangle$$
$$= \frac{1}{\delta}\{\langle Au_j - Av', v' - u_j\rangle + \langle Au_j, u_j\rangle + \langle Av', v' - u_j\rangle\}.$$

За умови монотонності оператора A маємо $\langle Au_j - Av', v' - u_j\rangle \geq 0$, тоді $\langle Au_j - Av', v' - u_j\rangle = -\langle Au_j - Av', u_j - v'\rangle \leq 0, \langle Au_j, u_j\rangle = \langle f, u_j\rangle \leq \|f\| \cdot \|u_j\|$.

За умови неперервності оператора А для $\|w\| \leq \delta \Longrightarrow \|Aw\| \leq K$, тобто є локальна обмеженість – обмеженість на кожній кулі. Тоді з (1.24)

$$\langle Au_j v\rangle \leq \frac{1}{\delta}\|f\| \cdot \|u_j\| + \frac{1}{\delta}\|Av'\| \cdot \|v' - u_j\| \leq \frac{1}{\delta}\|f\|M + \frac{1}{\delta}K(\|v'\| + \|u_j\|)$$
$$\leq \frac{1}{\delta}\|f\|M + \frac{1}{\delta}K \cdot \delta + \frac{1}{\delta}KM = N.$$

Тобто $\exists\, N > 0$: $|\langle Au_j, v\rangle| \leq N, \forall v \in X$. Таким чином, доведено обмеженість $\{Au_j\}$ в X^*.

3. Існування підпослідовності $u_{jk} \rightharpoonup u_0$ випливає з теореми-властивості слабкої компактності рефлексивного банахового простору.

4. Зауваження 1. $\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j} = X$. Тобто, для довільного $u_0 \in X$ існує підпослідовність $\{u_{jk}^*\} \subset F_j$ така, що $u_{jk}^* \to u_0$. Фіксуємо деяке $n \in N$ і розглянемо $j_k \geq n$. Для будь-якого $w \in F_n$матимемо

$$0 \leq \langle Au_{jk} - (Au_{jk}^* + \varepsilon w), u_{jk} - (u_{jk}^* + \varepsilon w)\rangle$$

за умови монотонності оператора A. З іншого боку, $u_{jk} - u_{jk}^* \in F_{jk}$, але $j_k \geq n$. І оскільки $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset F_{jk}$, то $\varepsilon w \in F_n \Longrightarrow \varepsilon w \in F_{jk}$. Тобто, $u_{jk} - u_{jk}^* - \varepsilon w \in F_{jk}$. За умови того, що u_{jk} − підпослідовність скінченновимірних розв'язків, отримуємо

$$\langle Au_{jk}, u_{jk} - u_{jk}^* - \varepsilon w\rangle = \langle f, u_{jk} - u_{jk}^* - \varepsilon w\rangle.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}&\langle Au_{jk} - A(u_{jk}^* + \varepsilon w), u_{jk} - u_{jk}^* - \varepsilon w\rangle \\ &\quad = \langle f, u_{jk} - u_{jk}^* - \varepsilon w\rangle - \langle A(u_{jk}^* + \varepsilon w), u_{jk} - u_{jk}^* - \varepsilon w\rangle.\end{aligned} \tag{5}$$

Із слабкої збіжності $u_{jk} \rightharpoonup u_0$, $u_{jk}^* \rightharpoonup u_0$, для будь-якого $f \in X^*$ маємо

$$\langle f, u_{jk} - u_{jk}^* - \varepsilon w\rangle \to \langle f, -\varepsilon w\rangle, j_k \to \infty,$$
$$\langle A(u_{jk}^* + \varepsilon w), u_{jk} - u_{jk}^* - \varepsilon w\rangle \to \langle A(u_0 + \varepsilon w), -\varepsilon w\rangle,$$

оскільки $u_{jk}^* \to u_0$ сильно в X. Таким чином, переходячи в (5) до границі по $j_k \to \infty$, матимемо

$$\langle f, -\varepsilon w\rangle - \langle A(u_0 + \varepsilon w), -\varepsilon w\rangle \geq 0,$$
$$\langle f, w\rangle - \langle A(u_0 + \varepsilon w), w\rangle \leq 0.$$

Перейдемо до границі в останній нерівності по $\varepsilon \to 0$

$$\langle f, w\rangle - \langle Au_0, w\rangle \leq 0.$$

Тут використано неперервність оператора $A: X \to X^*$, тобто якщо $u_0 + \varepsilon w \to u_0$ при $\varepsilon \to 0$, то $A(u_0 + \varepsilon w) \to Au_0$ в X^*. Звідси випливає, що $\langle A(u_0 + \varepsilon w), w\rangle \to \langle Au_0, w\rangle$.

Таким чином, для довільного $w \in F_n$ має місце нерівність

$$\langle Au_0 - f, w\rangle \geq 0. \tag{6}$$

Оскільки $\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j} = X$, то (6) справджується для довільного $w \in X$

$$\langle Au_0 - f, w\rangle \geq 0, \qquad \forall w \in X. \tag{7}$$

Аналогічну нерівність отримуємо для $-w \in X$

$$\langle Au_0 - f, -w\rangle \leq 0,$$

або

$$\langle Au_0 - f, w\rangle \le 0. \tag{8}$$

З (7) і (8) маємо $\langle Au_0 - f, w\rangle = 0, \forall w \in X$. Тобто, маємо рівність в X^*: $Au_0 = f$. Отже, $u_0 \in X$ −розв'язок операторного рівняння $Au = f$.

3. Метод Гальоркіна для еволюційних задач

Застосуємо тепер метод Гальоркіна для розв'язання оберненої задачі (1)-(3). За основу візьмемо також інтерпретацію метода Гальоркіна для лінійних еволюційних рівнянь (див. [7]). Схема доведення буде спиратися на етапи п.1.

3.1. Побудова скінченновимірного розв'язку

Спочатку шукаємо скінченновимірний розв'язок у вигляді:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= li\,m(u_{0m}) = \sum_{i=1}^{m} w_i(x)u_{0m} \to u_0 \text{ в } H = L^2(0,l), \text{при } m \to \infty; \\ u_1(x) &= li\,m(u_{1m}) = \sum_{i=1}^{m} w_i(x)\, u_{1m} \to u_1 \text{ в } H = L^2(0,l), \text{при } m \to \infty. \end{aligned} \tag{9}$$

Визначимо наближений розв'язок $u_m(t,x)$ задачі співвідношеннями

$$\begin{gathered} u_m(t,x) = \textstyle\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i\,(x), \\ \left(\rho(x)\frac{d^2u(x,t)}{dt^2}, w_j(x)\right) + \left(u''_m(t,x), w_j(x)\right) = \left(f(x,t), w_j(x)\right),\ \ i \le j \le m \\ u_m(0,x) = u_{0m}(x), \qquad u'_m(0,x) = u_{1m}(x). \end{gathered} \tag{10}$$

Очевидно, що задача Коші відносно коефіцієнтів розкладання $g'_m(t)$ має єдиний розв'язок (див.[2, 3]).

3.2. Доведення слабкої збіжності скінченновимірних наближень

Для отримання апріорної оцінки функції $u_m(t,x)$ помножимо друге з співвідношення (3) на $g'_{jm}(t)$ і просумуємо по j, тоді, скориставшись формулою $u_m(t,x) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i\,(x)$, матимемо

$$\begin{gathered} (u''_m(t,x), u'_m(t,x)) + (\rho(x), \nabla u) = \left(f(x,t), u'_m(x,t)\right), \\ \frac{d}{dt}[|u'_m(t,x)|^2 + (\rho(x), \nabla u)] = 2\left(f(x,t), u'_m(x,t)\right). \end{gathered}$$

Відповідно

$$|u'_m(t,x)|^2 + \nabla u = |u_{im}(t,x)|^2 + 2\int_0^t \left(f(x,\sigma), u'_m(x,\sigma)\right)d\sigma,$$

звідки

$$\begin{gathered} |u'_m(t,x)|^2 + \|u_m(t,x)\|^2 \le (\|u_{0m}(t,x)\|^2 + |u_{1m}(t,x)|^2) + C|u_m(t,x)|^2 + \\ C\textstyle\int_0^t [\|u_m(x,\sigma)\| + |f(x,\sigma)||u'_m(x,\sigma)|]\,d\sigma; \end{gathered} \tag{11}$$

Але

$$|u_m(t,x)| \le |u_{0m}(0,x)| + \int_0^t |u'_m(x,\sigma)|d\sigma\,;$$

тому якщо покласти

$$|u'_m(t,x)|^2 + \|u_m(t,x)\|^2 = U_m(t), \tag{12}$$

тоді з нерівності (11) отримаємо

$$U_m(t) \le \mathrm{C}\left[\|u_{0m}(0,x)\|^2 + |u_{1m}(0,x)|^2 + \int_0^t |f(x,\sigma)|^2 d\sigma\right] + \mathrm{C}\int_0^t U_m(\sigma)d\sigma. \tag{13}$$

Внаслідок леми Гронуола (див. [4]) матимемо:

$$\|u_m(t,x)\| \le C, \quad t \in [0,T], \tag{14}$$

де $C -$ стала, яка не залежить від m.

Відношення (14) означає, що послідовність u_m є обмеженою в підмножині простору $L^\infty\big(0,T;L^2(0,l)\big)$; послідовність $\frac{du_m}{dt}$ є також обмеженою в підмножині простору $L^\infty\big(0,T;L^2(0,l)\big)$.

Тоді, відповідно [5, 6], можна знайти таку підпослідовність $\{u_\mu\}$, що

$$\begin{gathered} u_\mu \to u - \text{слабко в } L^\infty\big(0,T;L^2(0,l)\big); \\ \frac{du_\mu}{dt} \to \frac{du}{dt} - \ \text{слабко в } L^\infty\big(0,T;L^2(0,l)\big). \end{gathered} \tag{15}$$

Тоді, $u_\mu(0,x) \to u(0,x)$ слабко збігається в просторі $H = L^2(0,l)$ і так як, згідно з (9),

$$\begin{gathered} u_\mu(0,x) = u_{0\mu} \to u_0 \text{ в } H = L^2(0,l), \\ u(0,x) = u_0(x). \end{gathered} \tag{16}$$

3.3. Доведення існування розв'язку

Нехай $\varphi \in C^1([0,T])$, $\varphi(T) = 0$; позначимо $\varphi_j(t) = \varphi(t)w_j$. Помноживши друге з відношень (2-3) (при $m = \mu > j,$ де $j -$ довільне фіксоване число) на функцію $\varphi(t)$ і проінтегрувавши від 0 до T, отримаємо

$$\int_0^T \left[-\left(u'_\mu,\ \varphi'_j\right)\right] dt = \int_0^T \left(f,\varphi_j\right) dt + \Big(u_{1\mu},\varphi_j(0)\Big).$$

Переходячи до границі при $\mu \to \infty$, знаходимо

$$\int_0^T \left[-\left(u',\ w_j\right)\varphi'\right] dt = \int_0^T \left(f,w_j\right)\varphi\ dt + \left(u_1,\ w_j\right)\varphi(0).$$

Якщо взяти $\varphi \in D\big((0,T)\big)$, то

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(u,\ w_j\right) + \rho(x)\Delta u = \left(f,\ w_j\right) \quad \forall j.$$

Тому

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \rho(x)\Delta u = f.$$

Отже,

$$\left(u'(\,x,0),\ w_j\right)\varphi(0) = \left(\,u_1(x),\ w_j\right)\varphi(0), \quad \forall j, \forall \varphi,$$

а значить, $u'(0,x)= u_1(x)$.

Таким чином, елемент u дійсно є розв’язком задачі (1-3).

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 1. Нехай

$$\begin{gathered} f \in L^\infty(0,T;\ L^2(0,l)), \\ u_0(x) \in\ L^2(0,l), \\ u_1(x) \in\ L^2(0,l). \end{gathered} \tag{17}$$

Тоді в просторі $W^{1,\infty}\big(0,T;L^2(0,l)\big)$ існує єдиний розв’язок u^fзадачі (17) і, відповідно, існує обмежений розв’язок $\rho(x)$ оберненої задачі $\rho(x) \to u^f(x,t)$.

Зауваження. Зауважимо, що результат теореми 1. збігаються з результатом роботи [8] у випадку першої крайової задачі та $\sigma = 0$. Однак, на відміну від результату роботи [8], який був отриманий за допомогою білінійних форм, наш результат був отриманий методом Гальоркіна для еволюційних рівнянь. На відміну від ВС методу, який треба підлаштовувати під кожне конкретне рівняння та тип задачі, вводячи відповідні до рівняння та задачі квадратичні форми, метод Гальоркіна є універсальний, складається з чітко визначених етапів, реалізація яких полягає в доведенні збіжностей апроксимуючих послідовностей.

4. Висновки

В даній роботі ми дослідили обернену задачу для хвильового рівняння з граничними умовами; розглянули метод Гальоркіна для стаціонарних та еволюційних рівнянь; застосували метод Гальоркіна для пошуку розв'язку оберненої задачі для одновимірного хвильового рівняння. Основний результат роботи збігається з результатом роботи [8] у випадку першої крайової задачі та $\sigma = 0$. Однак, на відміну від результату роботи [8], який був отриманий за допомогою білінійних ВС, наш результат був отриманий методом Гальоркіна для еволюційних рівнянь. На відміну від методу граничного контролю, який треба підлаштовувати під кожне конкретне рівняння та тип задачі, вводячи відповідні до рівняння та задачі квадратичні форми, метод Гальоркіна є універсальний, складається з чітко визначених етапів, реалізація яких полягає в доведенні збіжностей скінченновимірних апроксимацій розв'язку.

Список використаної літератури:

1. Lions J.-L. Contr'ole Optimale de Syst'emes Gouvernes par des Equations aux Derivees Partielles / J.-L. Lions. – Paris. – 1968. – Режим доступу: https://books.google.com.ua/books/about/Contr%C3%B4le_optimal_de_syst%C3%A8mes_gouvern%C3%A9.html?id=tE7vAAAAMAAJ&redir_esc=y

2. Pestov L. On reconstruction of the speed of sound from a part of boundary. / L. Pestov. –// J. Inverse Ill-Posed Probl. – 1999. – no. 5. – P. 481–486. – Режим доступу: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/jiip.1999.7.5.481/html

3. Pestov L., Bolgova V., Kazarina O. Numerical recovering of a density by the BC-method/ L. Pestov, V. Bolgova O. Kazarina // Inverse Probl. Imaging 4. – 2010. – no. 4. – P. 701–712. – Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/45854968_Numerical_recovering_a_density_by_BC-method

4. Rassel D. L. Boudary value control theory of the higher-dimensioanal wave equation / D. L. Rassel // SIAM J. Control Optim. – 9. – 1971. – P. 29-42. – Режим доступу: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-46329-7_16

5. Belishev M. I. Dynamical systems with boundary control: models and characterization of inverse data. / M. I. Belishev. // Inverse Problems 17. – 2001. – no. 4. – P. 659–682. – Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/230900261_Dynamical_systems_with_boundary_control_Models_and_characterization_of_inverse_data

6. Belishev M. I. Equations of Gel'fand-Levitan type in a multidimensional inverse problem for the wave equation. / M. I. Belishev. // J. Soviet Math. – 50, No. 6. – 1990. – P. 1940–1944. – Режим доступу: https://iopscience.iop.org/article/10.1070/SM1992v072n02ABEH002141

7. Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L. Boundary value problems for operator differential equations, Mathematics and its applications. / V. I. Gorbachuk and M. L. Gorbachuk. // Kluwer Academic Publishers Group. – Dordrecht. – №48. – 1991. – P. 347. – Режим доступу: https://www.springer.com/de/book/9780792303817

8. Pestov L., Strelnikov D. Approximate controllability of the wave equation with mixed boundary conditions. / L. Pestov, D. Strelnikov. // Journal of Mathematical Sciences. – № 1. – 2019.– P. 239. – Режим доступу: https://link.springer.com/article/10.1007/s10958-019-04289-8

9. Шраменко В.М., Буряченко К.О., Лиманський Д.В. Застосування нелінійного функціонального аналізу до теорії диференціальних рівнянь. / В. М. Шраменко, К. О. Буряченко, Д. В. Лиманський. // Навч. посібник. – Донецьк: ДонНУ. – 2011. – P. 184. – Режим доступу: https://mph.kpi.ua/assets/img/Shramenko-V.M/MTDCHKAfinal.pdf

10. Pestov L. Inverse problem of determining absorption coefficient in the wave equation by BC method. / L. Pestov. // J. Inverse Ill-Posed Probl.20. – 2012. – DOI 10.1515/jip-2011-0015. – P. 103-110. – Режим доступу: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/jip-2011-0015/html

References:

1. Lions J.-L. (1968). Contr'ole Optimale de Syst'emes Gouvernes par des Equations aux Derivees Partielles. *Paris*. Retrieved from https://books.google.com.ua/books/about/Contr%C3%B4le_optimal_de_syst%C3%A8mes_gouvern%C3%A9.html?id=tE7vAAAAMAAJ&redir_esc=y
2. Pestov L. (1999) On reconstruction of the speed of sound from a part of boundary. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 7. no. 5. 481–486. Retrieved from https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/jiip.1999.7.5.481/html
3. Pestov L., Bolgova V., Kazarina O. Numerical recovering of a density by the BC-method. *Inverse Probl. Imaging 4.* 2010. no. 4. 701–712. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/45854968_Numerical_recovering_a_density_by_BC-method
4. Rassel D. L. (1971) Boudary value control theory of the higher-dimensioanal wave equation. *SIAM J. Control Optim. 9.* 29–42. Retrieved from https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-46329-7_16
5. Belishev M. I. (2001) Dynamical systems with boundary control: models and characterization of inverse data. *Inverse Problems 17.* no. 4. 659–682. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/230900261_Dynamical_systems_with_boundary_control_Models_and_characterization_of_inverse_data
6. Belishev M. I. (1990) Equations of Gel'fand-Levitan type in a multidimensional inverse problem for the wave equation. J. *Soviet Math. 50.* No. 6. 1940-1944. Retrieved from https://iopscience.iop.org/article/10.1070/SM1992v072n02ABEH002141
7. Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L. (1991) Boundary value problems for operator differential equations. Mathematics and its applications. *48. Kluwer Academic Publishers Group. Dordrecht.* 347. Retrieved from https://www.springer.com/de/book/9780792303817
8. Pestov L., Strelnikov D. (2019) Approximate controllability of the wave equation with mixed boundary conditions. *Journal of Mathematical Sciences.* Vol. 239. №. 1. Retrieved from https://link.springer.com/article/10.1007/s10958-019-04289-8
9. Shramenko V.M., Buriachenko K.O., Lamanskiy D.V. (2011) Application of nonlinear functional analysis to the theory of differential equations. *Manual text. Donetsk: DonNU.* 184. Retrieved from https://mph.kpi.ua/assets/img/Shramenko-V.M/MTDCHKAfinal.pdf
10. Pestov L. (2012) Inverse problem of determining absorption coefficient in the wave equation by BC method. *J. Inverse Ill-Posed Probl.20* DOI 10.1515/jip-2011-0015. 103–110. Retrieved from https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/jip-2011-0015/html

A. Yu. Kurbet
Student, Master of Math.,
Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine,
e-mail: annkurbet@gmail.com

K. O. Buryachenko
Ph.D. Associate Professor,
Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine,
e-mail: k.buriachenko@donnu.edu.ua

GALYRKIN'S METHOD IN INVERSTIGATIONS OF INVERSE BOUNDARY PROBLEMS FOR WAVE EQUATIONS

Summary. *The paper is devoted to solvability of inverse problem for one-dimensional wave equations with the help of Galerkin`n method. This theme attracts the interest of researchers due to many practical applications of such type problems: it is very actual task to find the wave speed in many acoustic problems. To solve the inverse problem it means to find (numerically or analytically)* *unknown coefficient of equations (in our case—to find the wave speed). In this directions the papers of Gorbachuk V. I. [7], Lions J.-L. [1], L. Pestov [8, 10], D. Strelnikov [8] can be mentioned.*

In the paper the principal methods of investigations are based on methods of mentioned papers and the main task of the paper is to adapt and to use the Galerkin's method for solving the Cauchy-Dirichlet inverse problem for wave equation.

As it is known, wave equation simulates the wave processes in the space, 3-dimensional wave equation simulates the acoustic wave. Solving inverse problems it is arising the necessarity to find unknown coefficient of equation, which in the case of wave equations is acoustic speed. This tasks are very interesting due to many applications in tomography, car-industry, where it is necessary to find signal, acoustic wave as inverse signal: car testing in limit speed, image quality of tomography, etc.

The main goal of the paper is to prove the existence theorem for weak solution to inverse Cauchy-Dirichlet problem for one-dimensional wave equation with the help of Galerkin`s method and its adaptation for evolution equations. Let us note, that result of the existence theorem (see Theorem 1) coincide with the results of the work [8] in the case of the first boundary value problem and $\sigma = 0$*. But we did not use BC method, which can be applied only for concrete equations and concrete type of boundary conditions due to definition of corresponding to equation quadratic form. As alternative approach, we use Galerkin`s method, which is universal for all equations and all types of boundary conditions and which allows only to realize its steps and to prove convergence of approximating consequences.*

Keywords: inverse problem, evolution equations, wave equation, Galyrkin's method, nonlinear operators in separable Banach space, weak solutions, acustic prosesses simulation.

Одержано редакцією 08.10.2020
Прийнято до друку 20.11.2020