

ORCID: 0000-0002-2819-5829

В. В. Атамась

Кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри автоматизації та комп'ютерно інтегрованих технологій Черкаського
національного університету імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна,
atamas_v@ukr.net

УДК 514

MSC 51N20

DOI: 10.31651/2076-5851-2021-109-125

ПЕРЕРІЗИ ГУБКИ МЕНГЕРА⁷

Килим Серпінського та губка Менгера є відповідно плоским та тривимірним аналогами множини Кантора. При перерізі цих фракталів прямими та площинами утворюються нові цікаві фрактальні об'єкти. У статті наведено алгоритм як завгодно точної побудови перерізів килима Серпінського та губки Менгера вертикальними прямими і площинами відповідно. Зокрема показано, що вертикальні перерізи губки Менгера є різними комбінаціями побудов килима Серпінського та цвинтаря Серпінського на різних етапах побудови. Так само вертикальні чи горизонтальні перерізи килима Серпінського є комбінаціями побудов множини Кантора і відрізків відповідної довжини на різних етапах. Крім того, показано зображення деяких інших перерізів цих об'єктів іншими прямими та площинами. Побудова таких перерізів є важливою ще й тому, що будова губки Менгера дуже схожа на будову синтетичного активованого вугілля чи штучно створених пористих сплавів NiTi, які здатні запам'ятовувати форму.

Ключові слова: фрактал, множина Кантора, цвинтар Серпінського, перерізи килима Серпінського, перерізи губки Менгера.

1. Вступ

Дослідження фрактальних об'єктів залишається в тренді сучасних математичних досліджень. При перетині фрактальних множин прямими чи площинами у перерізі з'являються нові множини часто з цікавими властивостями, які представляють окремий інтерес. Цікаві перерізи одного з таких фракталів – губки Менгера були отримані, наприклад, у [1, 2]. Будова губки Менгера дуже нагадує синтетичне активоване вугілля під мікроскопом чи виготовлені пористі сплави NiTi, що запам'ятовують форму [5]. У ньому також можна побачити величезну кількість крихітних заглибин і отворів. Цікавими виявилися перерізи губки Менгера вертикальними площинами, які і стали основним об'єктом дослідження у цій статті. Зокрема, наведено алгоритм як завгодно точної побудови перерізів килима Серпінського та губки Менгера вертикальними прямими і площинами відповідно.

⁷ Висловлюю подяку своїм ученицям Лисенко Катерині та Лютій Анастасії за допомогу у написанні статті.

2. Перерізи килима Серпінського

Множина Кантора – підмножина відрізка дійсних чисел $[0,1]$, названа в честь німецького математика Георга Кантора (1845 – 1918), який описав її в 1883 році. Побудова починається з відрізка $[0; 1]$, який ділиться на три рівні частини і видаляється середній інтервал. На другому кроці з двома відрізками, що залишилися, пророблюються ті самі перетворення. Ця процедура застосовується для всіх наступних відрізків. Через нескінченну кількість кроків отримаємо множину Кантора, що складається із точок відрізка $[0; 1]$, які залишилися. Перші чотири кроки побудови зображено нижче (див. рис. 1) [3].

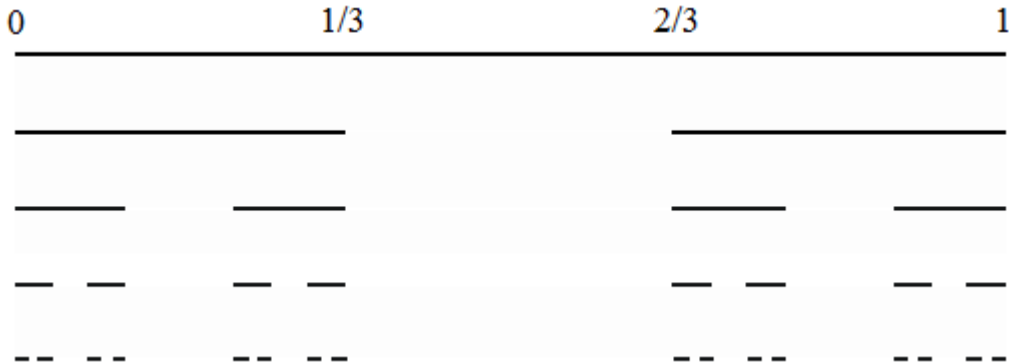


Рис. 1. Побудова множини Кантора
Fig. 1. Construction of the Cantor set

У роботі [4] показано, що всі точки, що належать множині Кантора, можна задати у трійковій системі числення, використовуючи лише цифри 0 та 2. І навпаки, всі числа, які у трійковому записі мають лише цифри 0 і 2, є канторівськими числами. Ця властивість гратиме вирішальну роль при побудові перерізів.

До двовимірних аналогів множини Кантора відносять килим та цвинтар Серпінського.

Килим Серпінського – це плоский фрактал, вперше описаний видатним польським математиком Вацлавом Серпінським (1882 – 1969) в 1916 році. Килим є одним із прикладів двовимірної множини Кантора. Його побудова починається із квадрата. Квадрат поділяється на 9 конгруентних квадратиків, що утворюють сітку три на три, і центральний – видаляється. Та ж процедура нескінченно рекурсивно застосовується до вісьмох квадратів, що залишилися. В результаті отримуємо Килим Серпінського (рис. 2.) [3].

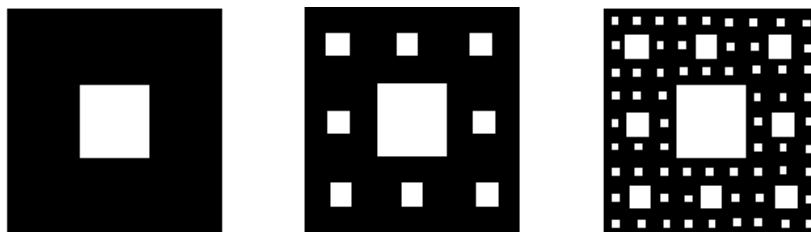


Рис. 2. Два перші кроки побудови килима Серпінського
Fig. 2. The first two steps in building a Sierpinsky carpet

Цвинтар Серпінського – це декартовий добуток множини Кантора на себе. Його побудова починається із квадрата. Квадрат поділяється на 9 конгруентних квадратиків, що утворюють сітку три на три, і центральний разом із прилеглими до нього –

видаляються. Та ж процедура нескінченно рекурсивно застосовується до чотирьох квадратів, що залишилися. В результаті отримуємо цвинтар Серпінського (рис. 3) [3].

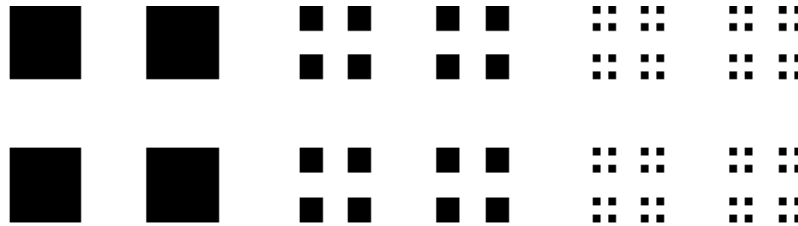


Рис. 3. Два перші кроки побудови цвинтаря Серпінського
 Fig. 3. The first two steps in building the Cantor dust

Спочатку розглянемо перерізи килима Серпінського, утворені при перетині прямими. Вважатимемо, що довжина сторони килима рівна одиниці. Для зручності будемо використовувати трійкову систему числення.

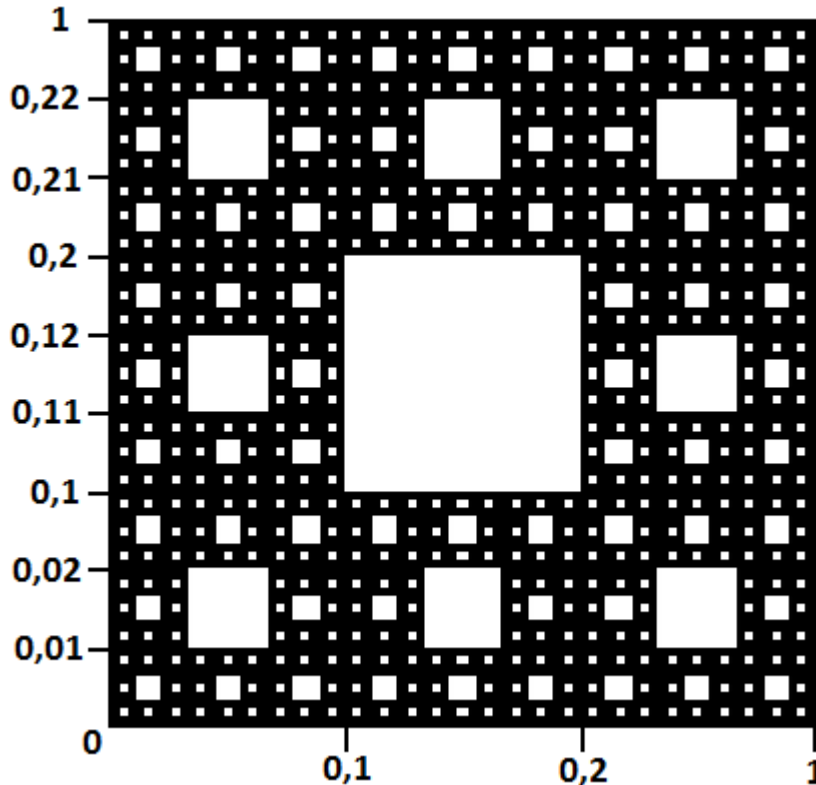


Рис. 4. Килим Серпінського в системі координат
 Fig. 4. Sierpinsky carpet in the coordinate system

Зважаючи на симетричність килима Серпінського, горизонтальні перерізи будуть аналогічні вертикальним. Знайдемо залежність перерізу від точки, через яку проходить горизонтальна (вертикальна) пряма, представивши її у трійковій системі числення, тобто у вигляді

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n \dots_3, \quad n \in N,$$

де $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ набувають значень 0, 1 або 2.

На першому кроці побудови килима Серпінського можна отримати два перерізи. Якщо $x \in [0; 0,1] \cup [0,2; 1]$, то перерізом буде одиничний відрізок, а якщо $x \in (0,1; 0,2)$ – перший етап побудови множини Кантора (одиничний відрізок, поділений на три рівні частини з видаленою центральною).

На другому кроці побудови килима Серпінського можна отримати чотири перерізи. Якщо $x \in [0; 0,01] \cup [0,02; 0,1] \cup [0,2; 0,21] \cup [0,22; 1]$, то перерізом буде одиничний відрізок (рис. 5 а), якщо $x \in (0,01; 0,02) \cup (0,21; 0,22)$ отримаємо три перші етапи побудови множини Кантора, зменшені втричі і розташовані поруч (рис. 5 б), якщо $x \in (0,1; 0,11] \cup [0,12; 0,2)$ – перший етап побудови множини Кантора (рис. 5 в), якщо $x \in (0,11; 0,12)$ – другий етап побудови множини Кантора (рис. 5 г).

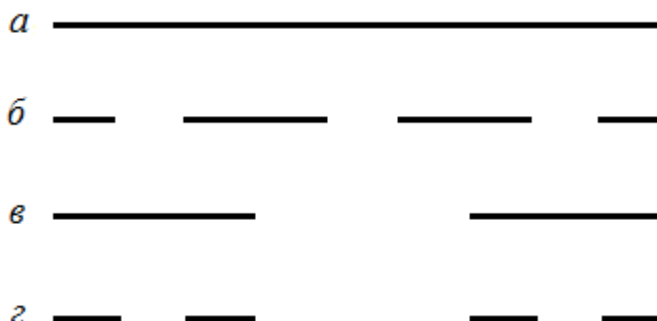


Рис. 5. Можливі перерізи килима на другому етапі побудови
Fig. 5. Possible sections of the carpet in the second stage of construction

На третьому кроці побудови килима Серпінського можна отримати вісім перерізів (рис. 6).

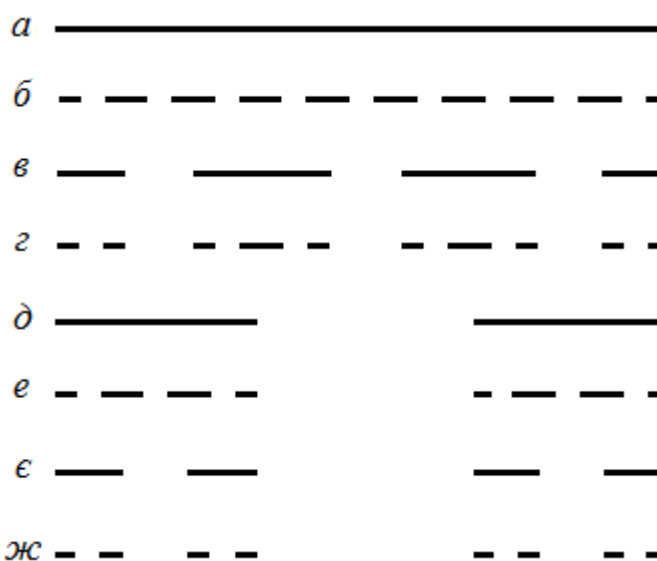


Рис. 6. Можливі перерізи килима на третьому етапі побудови
Fig. 6. Possible sections of the carpet in the third stage of construction

Тут a – переріз утворений при перетині прямою, що проходить через точку $x \in [0; 0,001] \cup [0,002; 0,01] \cup [0,02; 0,021] \cup [0,022; 0,1] \cup [0,2; 0,201] \cup [0,202; 0,21] \cup [0,22; 0,221] \cup [0,222; 1]$;
 $b - x \in (0,001; 0,002) \cup (0,021; 0,022) \cup (0,201; 0,202) \cup (0,221; 0,222)$;
 $v - x \in (0,01; 0,011] \cup [0,012; 0,02) \cup (0,21; 0,211] \cup [0,212; 0,22)$;
 $z - x \in (0,011; 0,012) \cup (0,211; 0,212)$;
 $d - x \in (0,1; 0,101] \cup [0,102; 0,11] \cup [0,12; 0,121] \cup [0,122; 0,2)$;
 $e - x \in (0,101; 0,102) \cup (0,121; 0,122)$;
 $\epsilon - x \in (0,11; 0,111] \cup [0,112; 0,12)$;
 $ж - x \in (0,111; 0,112)$.

Множина Кантора самоподібна, тому процедура побудови перерізів на наступних кроках буде аналогічною. Враховуючи це, сформулюємо загальний *алгоритм побудови горизонтальних (вертикальних) перерізів килима Серпінського* заданих точкою

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n \dots_3, n \in N:$$

1. Будуємо одиничний відрізок та ділимо його на три рівні частини. Якщо перша цифра після коми x_1 буде 0 або 2 – залишаємо його без змін. Якщо $x_1 = 1$ – середній інтервал видаляємо.

2. Ділимо кожний з відрізків, що залишився після $(n - 1)$ -го кроку, довжиною $\frac{1}{3^{n-1}}$ на три рівні частини. Якщо n -та цифра після коми x_n буде 0 або 2 – залишаємо без змін. Якщо $x_n = 1$ – середні інтервали видаляємо.

Зауваження. Якщо після «1», що стоїть на n -ому місці, в числі стоять лише нулі, то в такому випадку операцію видалення середніх інтервалів на n -ому кроці застосовувати не потрібно.

Приклад. Побудувати горизонтальний переріз килима Серпінського, що проходить через точку $x = 0,0112_3$.

Побудова:

1. Будуємо одиничний відрізок та ділимо його на три рівні частини. Так як $x_1 = 0$, то продовжуємо побудову без змін.

2. Ділимо кожний з трьох відрізків на три рівні частини та видаляємо середні інтервали (бо $x_2 = 1$).

3. Знову ділимо кожний відрізок, що залишився (їх у нас шість) на три рівні частини та видаляємо середні інтервали (бо $x_3 = 1$).

4. Оскільки в числі більше немає «1», то побудову можна завершити.

Зобразимо на рисунку 7 поетапну побудову цього перерізу:

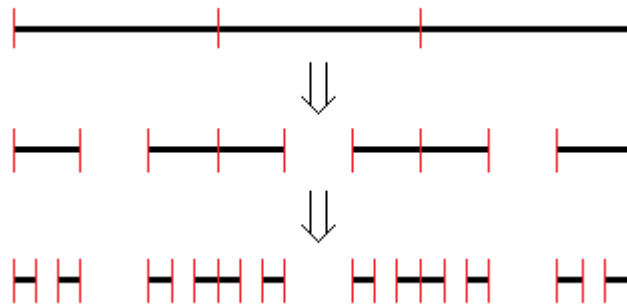


Рис. 7. Поетапна побудова перерізу
Fig. 7. Step-by-step construction of the section

Діагональні перерізи утворюються при перетині килима Серпінського прямою $y = x + b$, $b \in [-1; 1]$.

При $b = 0$ ($y = x$), перерізом буде множина Кантора, збільшена в $\sqrt{2}$ разів. Якщо $b = \pm \frac{1}{3}$, то перерізом будуть дві множини Кантора, зменшені в $\frac{\sqrt{2}}{3}$ разів та розташовані поруч, а якщо $b = \pm \frac{2}{3}$, то перерізом буде одна така множина (рис. 8). Отже, якщо $b = \frac{1}{3^k}$, $k \in N$, то такими перерізами будуть зменшені множини Кантора в $\frac{\sqrt{2}}{3^k}$ разів, розміщені поруч або на певній відстані.

Розглянемо випадок, коли $b = \frac{1}{2}$. Пряма $y = x + \frac{1}{2}$ не перетинає квадрат, видалений на першому кроці побудови килима Серпінського, а також квадрати,

видалені на другому кроці побудови. Тому, зважаючи на самоподібність килима Серпінського, ця пряма не

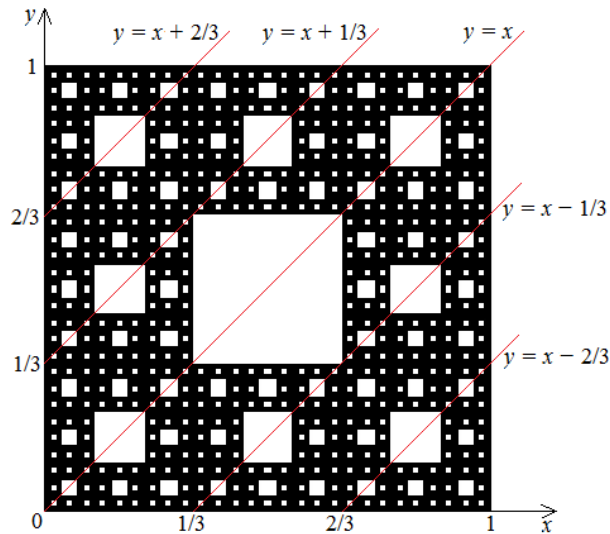


Рис. 8. Діагональні перерізи килима Серпінського
Fig. 8. Diagonal sections of the Sierpinsky carpet

перетне жодного квадрата, що був видалений на деякому кроці побудови. Отже, перерізом, утвореним цією прямою, буде суцільний відрізок, довжиною $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розглянемо переріз, утворений прямою $y = 2x$. Пряма $y = 2x$ перетинає квадрат в точках $(0; 0)$ і $(\frac{1}{2}; 1)$. Легко переконатись, що лише верхня ліва вершина видаленого квадрата на першому етапі побудови килима Серпінського належить цій прямій. Аналогічно, цій прямій також належатимуть вершини трьох квадратів, викинутих на другому етапі побудови килима Серпінського. Тому перерізом, що утвориться при перетині килима Серпінського прямою $y = 2x$, буде суцільний відрізок, довжиною $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. Перерізи губки Менгера

Одним із тривимірних аналогів множини Кантора є губка Менгера.

Губка Менгера – це геометричний фрактал, вперше описаний австрійсько-американським математиком Карлом Менгером (1902 – 1985) у 1926 році, при дослідженні концепції топологічної розмірності. Губка Менгера утворюється наступним чином. Беремо куб і ділимо його на 27 кубиків, а потім, на першому кроці побудови викидаємо центральний кубик і 6 прилеглих до нього. На наступних кроках застосовуємо такі самі дії до кожного кубика, що залишився. Після нескінченної кількості кроків ми отримуємо губку Менгера (рис. 9) [2].

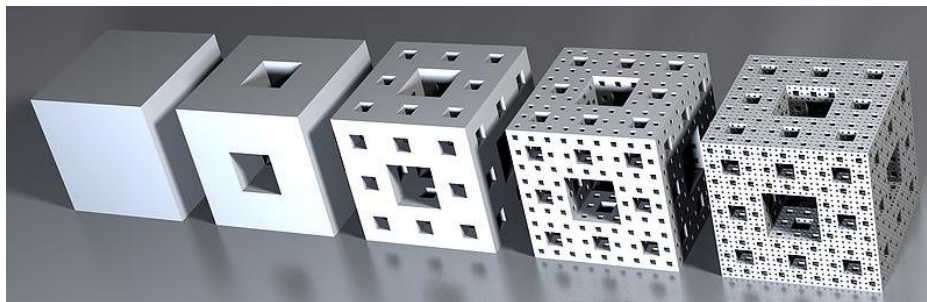


Рис. 9. Губка Менгера
Fig. 9. Menger sponge

Знайдемо перерізи губки Менгера, утворені при перетині її площинами, що паралельні двом протилежним граням куба. Розглянемо перерізи губки Менгера на першому, другому і третьому кроках побудови. Будемо вважати, що довжина ребра дорівнює одиниці. Для зручності використаємо трійкову систему.

На першій ітерації можна отримати два перерізи. На відрізках $[0; 0,1_3]$ та $[0,2_3; 1]$ – килим Серпінського (перша ітерація побудови) (див. рис. 10 а).

На інтервалі $(0,1_3; 0,2_3)$ – цвинтар Серпінського (перша ітерація побудови) (рис.10 б).



Рис. 10. Перерізи губки (перший крок)
Fig. 10. Sponge sections (first step)

На другій ітерації можна отримати 4 різних перерізи. На відрізках $[0; 0,01_3]$, $[0,02_3; 0,1_3]$, $[0,2_3; 0,21_3]$ та $[0,22_3; 1]$ – килим Серпінського (друга ітерація побудови) (рис. 11 а). На інтервалах $(0,01_3; 0,02_3)$ та $(0,21_3; 0,22_3)$ – фігура, яку можна побудувати застосовуючи до квадрата першу ітерацію побудови килима Серпінського, а до наступних восьми квадратами – першу ітерацію побудови цвинтаря Серпінського (рис. 11 б). На півінтервалах $(0,1_3; 0,11_3]$ та $[0,12_3; 0,2_3)$ – фігура, яку можна побудувати застосовуючи до квадрата першу ітерацію побудови цвинтаря Серпінського, а до наступних чотирьох квадратами – першу ітерацію побудови килима Серпінського (рис. 11 в). На інтервалі $(0,11_3; 0,12_3)$ – цвинтар Серпінського (друга ітерація побудови) (рис. 11 г).

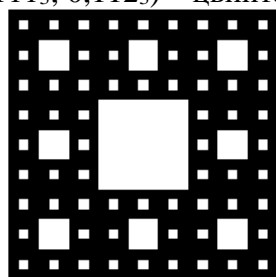




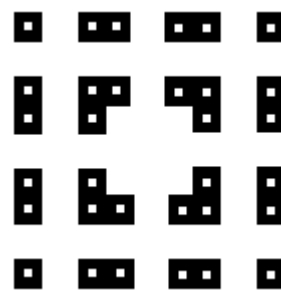
Рис. 11. Перерізи губки (другий крок)
Fig. 11. Cross sections of the sponge (second step)

На третій ітерації можна отримати 8 різних перерізів. На відрізках $[0; 0,001_3]$, $[0,002_3; 0,01_3]$, $[0,02_3; 0,021_3]$, $[0,022_3; 0,1_3]$, $[0,2_3; 0,201_3]$, $[0,202_3; 0,21_3]$, $[0,22_3; 0,221_3]$, $[0,222_3; 1]$ - килим Серпінського (третя ітерація побудови) (рис. 12 а). На інтервалах $(0,001_3; 0,002_3)$, $(0,021_3; 0,022_3)$, $(0,201_3; 0,202_3)$ та $(0,221_3; 0,222_3)$ – фігура, яку можна побудувати застосовуючи до квадрата першу та другу ітерації побудови килима Серпінського, а до наступних 64 квадратиків – першу ітерацію побудови цвинтаря Серпінського (рис. 12 б). На півінтервалах $(0,01_3; 0,011_3]$, $[0,012_3; 0,02_3)$, $(0,21_3; 0,211_3]$ та $[0,212_3; 0,22_3)$ – фігура, яку можна побудувати застосовуючи до квадрата першу ітерацію побудови килима Серпінського, першу ітерацію цвинтаря Серпінського та знову першу ітерацію побудови килима Серпінського (рис. 12 в). На інтервалах $(0,011_3; 0,012_3)$ та $(0,211_3; 0,212_3)$ – фігура, яку можна побудувати застосовуючи до квадрата першу ітерацію побудови килима Серпінського та дві ітерації побудови цвинтаря Серпінського (рис. 12 г).

На півінтервалах $(0,1_3; 0,101_3]$, $[0,122_3; 0,2_3)$ та відрізках $[0,102_3; 0,11_3]$, $[0,12_3; 0,121_3]$ – фігура, яку можна побудувати застосовуючи до квадрата першу ітерацію побудови цвинтаря Серпінського та дві ітерації побудови килима Серпінського (рис. 12 д). На інтервалах $(0,101_3; 0,102_3)$ та $(0,121_3; 0,122_3)$ – фігура, яку можна побудувати застосовуючи до квадрата першу ітерацію побудови цвинтаря Серпінського, першу ітерацію побудови килима Серпінського, та знову першу ітерацію побудови цвинтаря Серпінського (рис. 12 е). На півінтервалах $(0,11_3; 0,111_3]$ та $[0,112_3; 0,12_3)$ – фігура, яку можна побудувати застосовуючи до квадрата перші дві ітерації побудови цвинтаря Серпінського, та першу ітерацію побудови килима Серпінського (рис. 12 є). На інтервалі $(0,111_3; 0,112_3)$ – цвинтар Серпінського (три етапи побудови) (рис. 12 ж).



а



Б

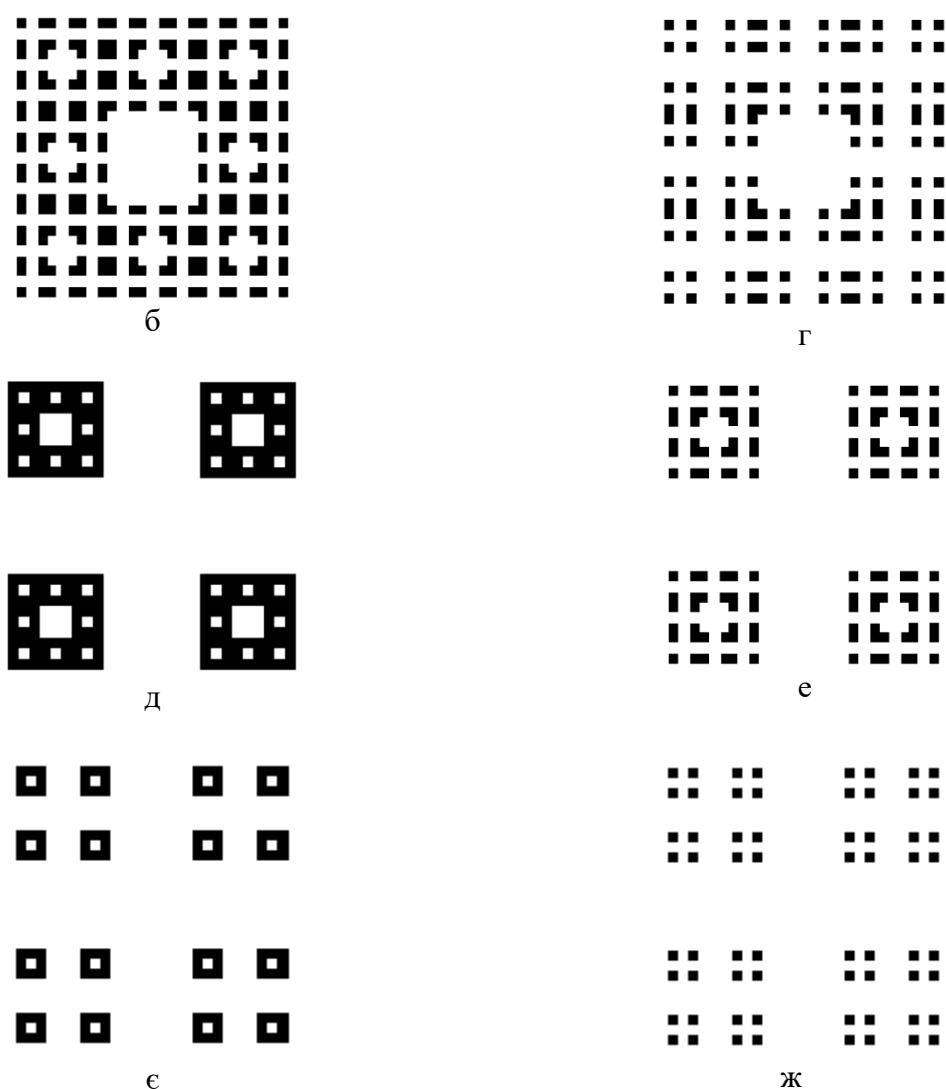


Рис. 12. Перерізи губки Менгера (третій крок)
 Fig. 12. Sections of the Menger sponge (third step)

З розглянутих вище вертикальних перерізів губки Менгера можна зробити висновок, що цвинтар Серпінського одержується лише у одному випадку – при перерізі через середину відрізка $[0,1]$. Килимом Серпінського буде переріз, що проходить через канторові точки.

Губка Менгера є самоподібною фігурою, тому процедура побудови перерізів на наступних кроках залишиться тією ж. Сформулюємо загальний *алгоритм побудови горизонтальних (вертикальних) перерізів губки Менгера*, заданих точкою $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n \dots, n \in \mathbb{N}$:

1. Будуємо квадрат із стороною 1. Якщо перша цифра після коми x_1 рівна 0 або 2, то до квадрату застосовується перший етап побудови килима Серпінського (ділимо квадрат на 9 конгруентних квадратиків, що утворюють сітку три на три, і центральний – видаляємо), а якщо перша цифра –1, то до квадрату застосовується перший етап побудови цвинтаря Серпінського (ділимо квадрат на 9 конгруентних квадратиків, що утворюють сітку три на три, центральний та чотири прилеглих до нього – видаляємо).

2. Якщо n -та цифра після коми $x_n = 0$ або 2, то до квадратиків, що залишилися після попереднього етапу побудови, застосовується один етап побудови килима

Серпінського, якщо друга цифра після коми – 1, то застосовується один етап побудови цвинтаря Серпінського.

Зауваження. Якщо після «1», що стоїть на n -ому місці, в числі стоять лише нулі, то в такому випадку замість етапу побудови цвинтаря Серпінського на n -ому кроці (та на всіх наступних кроках) потрібно застосувати етап побудови килима Серпінського.

Приклад. Побудувати переріз губки Менгера, заданий точкою $x = 0,1021_3$.

Побудова:

1. Будуємо квадрат зі стороною 1. Так, як $x_1 = 1$, застосовуємо один етап побудови цвинтаря Серпінського.

2. До кожного квадратика, що залишився застосовуємо етап побудови килима Серпінського (бо $x_2 = 0$).

3. До кожного квадратика, що залишився знову застосовуємо етап побудови килима Серпінського (бо $x_3 = 2$).

4. Так, як $x_4 = 1$ – це остання «1» в записі цього числа, то на всіх наступних ітераціях застосовуватимемо етап побудови килима Серпінського (бо після «1» в числі стоїть нескінченна кількість «0») (рис. 13).

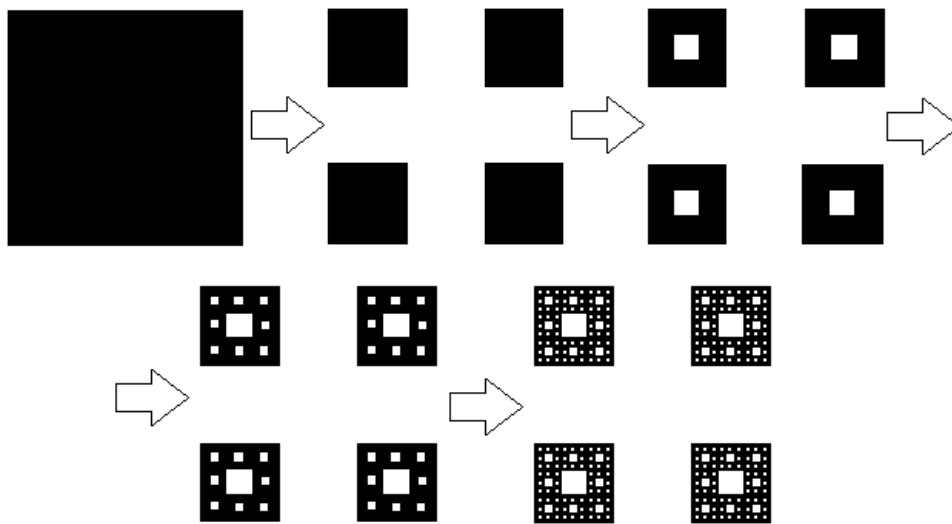


Рис. 13. Чотири етапи побудови
Fig. 13. Four stages of construction

Розглянемо деякі діагональні перерізи губки Менгера (на третій ітерації), а саме ті що зображені на наступному малюнку (рис. 14):

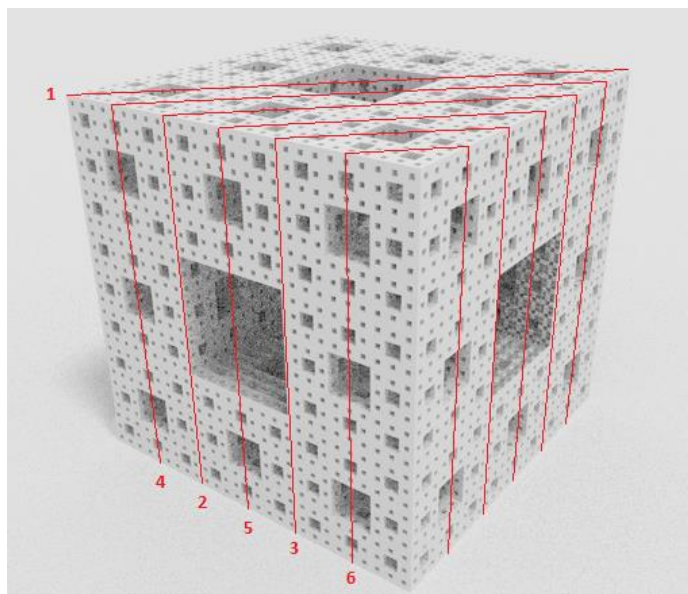


Рис. 14. Площини перетину губки Менгера
 Fig. 14. The plane of intersection of the Menger sponge

1) При першому розрізі отримаємо фігуру розміру $1 \times \sqrt{2}$ (рис. 15):



Рис. 15. Гребінь Кантора
 Fig. 15. Cantor crest

Неважко побачити, що це декартовий добуток множини Кантора (довжини $\sqrt{2}$) на одиничний відрізок.

2) При другому розрізі отримаємо фігуру розміру $1 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$ – чотири декартових добутка множини Кантора (довжини $\frac{2\sqrt{2}}{3}$) на одиничний відрізок (рис. 16).



Рис. 16. Зображення, що отримується при розрізі 2
 Fig. 16. The image obtained in section 2

3) При третьому розрізі отримаємо фігуру розміру $1 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$: декартовий добуток множини Кантора (довжини $\frac{\sqrt{2}}{3}$) на одиничний відрізок (рис. 17).



Рис. 17. Зображення, що отримується при розрізі 3
Fig. 17. The image obtained in section 3

Отже, можна говорити, що перерізи які проходять через головні діагоналі квадратів містять в собі множину Кантора.

При 4-му, 5-му і 6-му перерізах отримаємо наступні фігури (рис. 18).

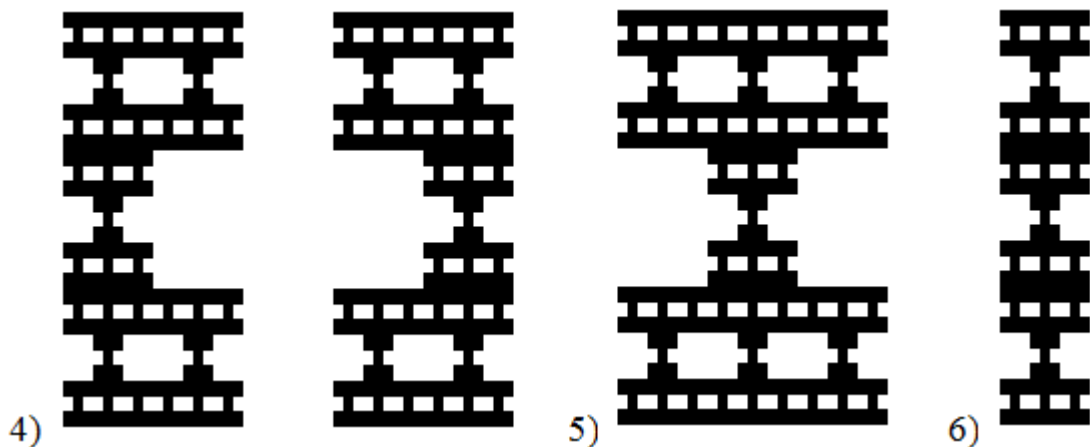


Рис. 18. Зображення, що отримується при розрізах 4, 5, 6
Fig. 18. The images obtained in sections 4, 5, 6

Якщо розрізати губку Менгера так, щоб переріз проходив через середини шести попарно сполучених ребер, як зображено на малюнку (рис. 19), то в результаті отримаємо

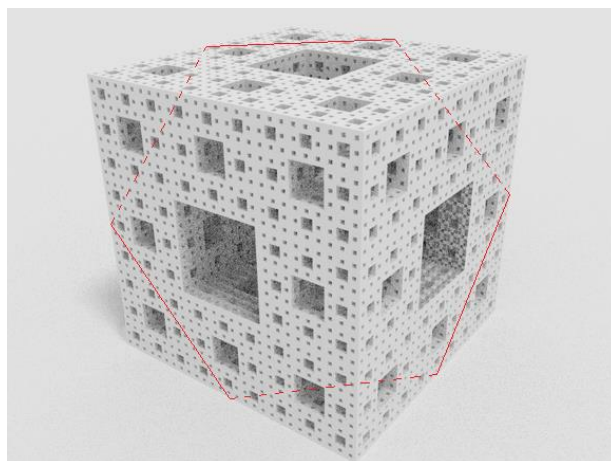


Рис. 19. Шестикутний переріз губки Менгера
Fig. 19. Hexagonal section of Menger sponge

правильний шестикутник з вирізаними зірками Давида (рис. 20) [6]:



Рис. 20. Правильний шестикутник з вирізаними зірками Давида
Fig. 20. A regular hexagon with carved stars of David

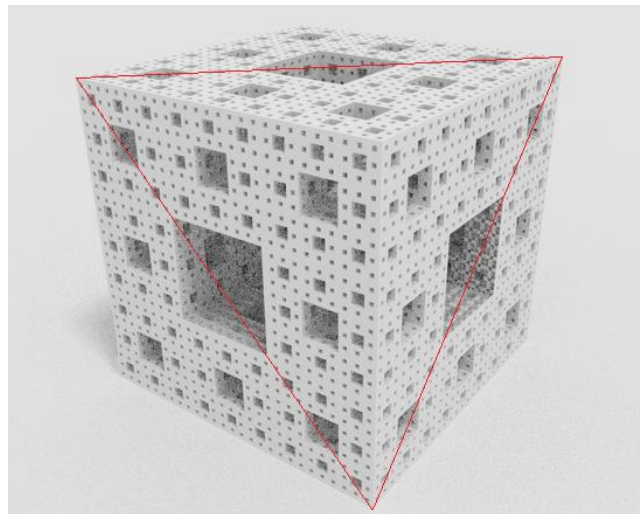


Рис. 21. Переріз через три вершини
Fig. 21. Section through three vertices

Якщо губку Менгера розрізати через три вершини (рис. 21), то отримаємо цікавий переріз – побудовану всередину сніжинку Коха (рис. 22) [6]:

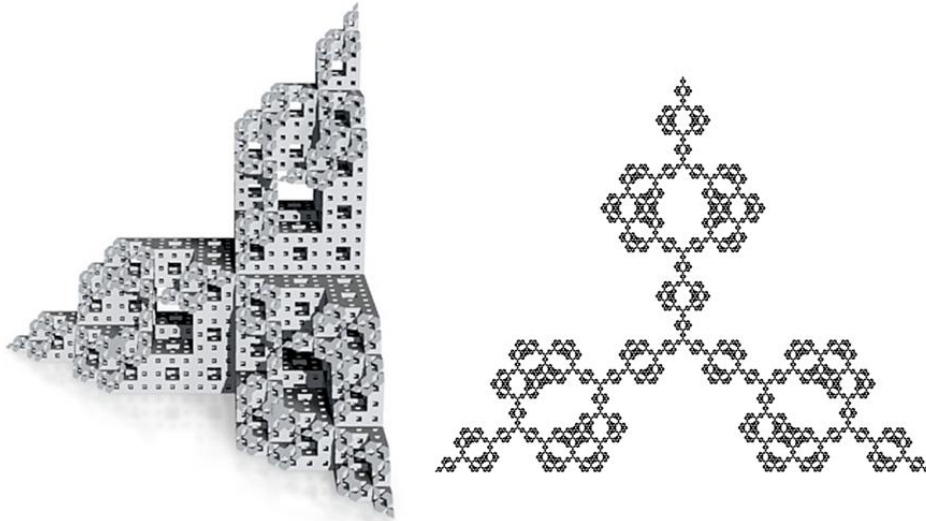


Рис. 22. У перерізі побудована всередину сніжинка Коха
Fig. 22. In cross section, a Koch snowflake is built inside

Якщо відрізати вдвічі меншу трикутну піраміду (рис. 23), то отримаємо рівносторонній трикутник з вирізаними зірками Давида (рис. 24).

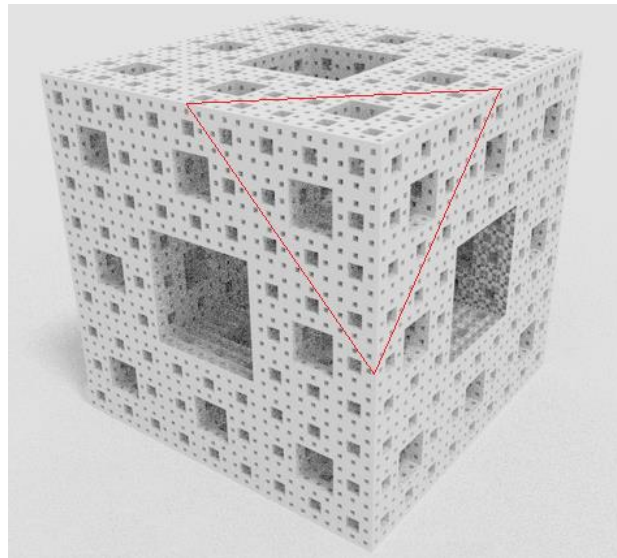


Рис. 23. Ще один трикутний переріз
Fig. 23. Another triangular section

Якщо розрізати губку Менгера через дві протилежні вершини, то отримаємо наступну фігуру (рис. 29).

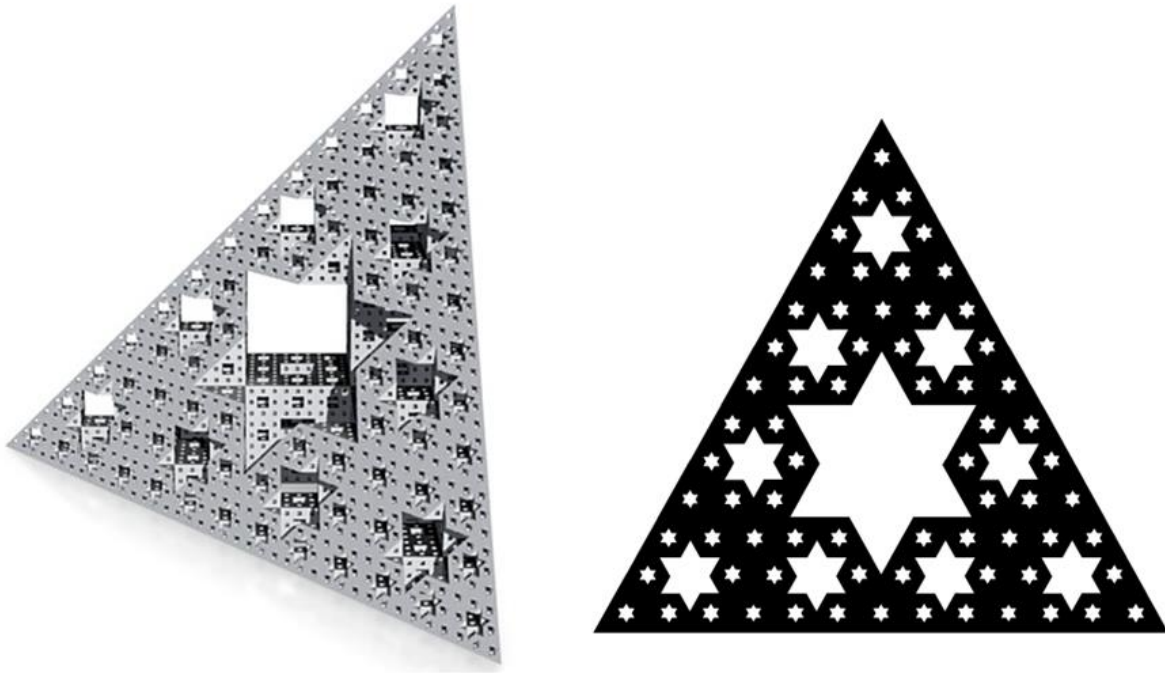


Рис. 24. Трикутник з вирізаними зірками Давіда
Fig. 24. Triangle with carved stars of David

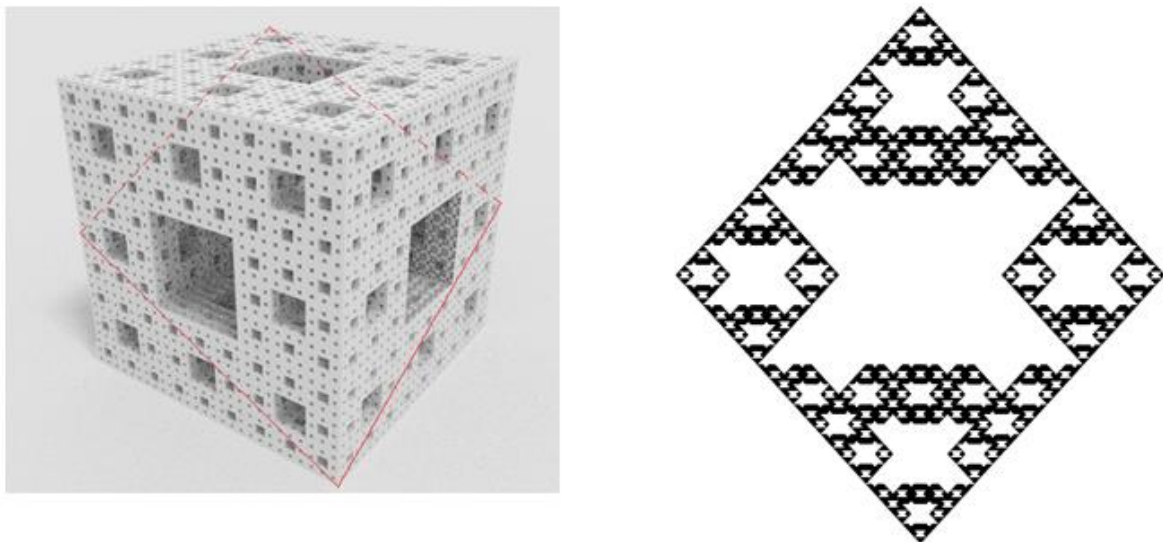


Рис. 25. Переріз через дві протилежні вершини
Fig. 25. Section through two opposite vertices

Розглянемо переріз, що проходить через середини двох суміжних ребер і вершину. В результаті утвориться наступна фігура (рис. 26).

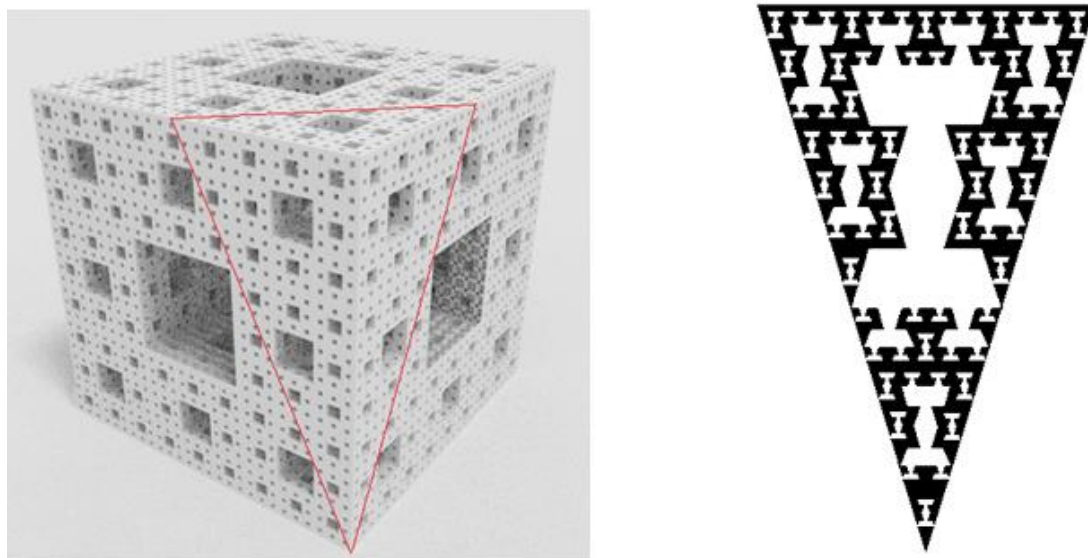


Рис. 26. Переріз, що проходить через середини двох суміжних ребер і вершину
 Fig. 26. A section passing through the middle of two adjacent edges and the vertex

4. Висновки

У статті наведено алгоритм побудови вертикальних (горизонтальних) перерізів килима Серпінського. Знайдено деякі інші перерізи цього фракталу. Основним результатом є алгоритм побудови перерізів губки Менгера площинами, які паралельні координатним площинам. Крім того, наведено приклади деяких інших перерізів цього тривимірного узагальнення множини Кантора.

Список використаної літератури:

1. File:Menger sponge diagonal section.gif. – Wikimedia commons/ – Режим доступу: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Menger_sponge_diagonal_section.gif (дата звернення: 07.05.2021). Назва з екрану.
2. Dickau R. Sliced fractal sponges. – Електронний ресурс/ – Режим доступу: <https://www.robertdickau.com/spongeslices.html> (дата звернення: 13.06.2021). Назва з екрану.
3. Mandelbrot, B. B. The fractal geometry of nature (Vol. 1) /Mandelbrot, B. B., & Mandelbrot// New York: WH freeman. – 1982. Retrieved from https://users.math.yale.edu/~bbm3/web_pdfs/encyclopediaBritannica.pdf
4. Falconer, K. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons. – 2004. – p. 329. Режим доступу: <https://www.maa.org/press/maa-reviews/fractal-geometry-mathematical-foundations-and-applications>
5. Zhao M. Superelastic behaviors of additively manufactured porous NiTi shape memory alloys designed with Menger sponge-like fractal structures / M. Zhao, H. Qing, Y. Wang, J. Liang, M. Zhao, Y. Geng, ... & B. Lu// Materials & Design. – 2021. – № 200, 109448. Режим доступу: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2021.109448>

References:

1. File: Menger sponge diagonal section.gif. – Wikimedia commons/ – Retrieved from https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Menger_sponge_diagonal_section.gif (application date: 05.07.2021). Name from the screen.

2. Dickau R. Sliced fractal sponges. – Електронний ресурс/ – Retrieved from <https://www.robertdickau.com/spongeslices.html> (date of application: 13.06.2021). Name from the screen

3. Mandelbrot, B. B., & Mandelbrot, B. B. (1982). The fractal geometry of nature (Vol. 1). New York: WH freeman. Retrieved from https://users.math.yale.edu/~bbm3/web_pdfs/encyclopediaBritannica.pdf

4. Falconer, K. (2004). Fractal geometry: mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons. Retrieved from <https://www.maa.org/press/maa-reviews/fractal-geometry-mathematical-foundations-and-applications>

5. Zhao, M., Qing, H., Wang, Y., Liang, J., Zhao, M., Geng, Y., ... & Lu, B. (2021). Superelastic behaviors of additively manufactured porous NiTi shape memory alloys designed with Menger sponge-like fractal structures. *Materials & Design*, 200, 109448. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2021.109448>

V. V. Atamas'

Ph. D., Associate Professor,

Department of Automation and Computer Integrated Technologies, The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,

atamas_v@ukr.net

MENGER SPONGE SECTIONS

Summary. *V. V. Atamas'*. **Menger sponge sections.** Serpinsky's carpet and Menger's sponge are flat and three-dimensional analogues of the Cantor set, respectively. When these fractals intersect in straight lines and planes, new interesting fractal objects are formed. The article presents an algorithm for arbitrarily accurate construction of sections of the Serpinsky carpet and the Menger sponge by vertical lines and planes, respectively. In particular, it is shown that the vertical sections of the Menger sponge are different combinations of the Serpinsky carpet and the Cantor dust at different stages of construction. Similarly, vertical or horizontal sections of the Serpinsky carpet are combinations of constructions of the Cantor set and segments of appropriate length at different stages. In addition, some other cross-sections of these objects are shown in other straight lines and planes. The construction of such cross-sections is important because the structure of the Menger sponge is very similar to the structure of synthetic activated carbon or artificially created porous alloys NiTi, which are able to remember the shape.

Keywords: fractal, Cantor set, Cantor dust, sections of the Serpinsky carpet, sections of the Menger sponge.

Одержано редакцією 18.07.2021

Прийнято до друку 23.09.2021