ORCID: 0000-0002-8868-0498
Ю. А. Андреєва
Магістр математики,
Донецький національний університет імені Василя Стуса Вінниця, Україна,
jandreieva7@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3363-2229
К. О. Буряченко
Канд. фіз.-мат.наук, доцент,
Донецький національний університет імені Василя Стуса Вінниця, Україна,
k.buriachenko@donnu.edu.ua

DOI 10.31651/2076-5851-2022-61-69 PACS 02, 02.30, 02.60

АНАЛОГ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ДЛЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ

Принцип максимуму є дієвим інструментом для дослідження якісних властивостей розв'язків рівнянь в частинних похідних. Як відомо з курсу рівнянь математичної фізики, для рівнянь еліптичного та параболічного типів принцип максимуму є дослідженим, відомим фактом, а також вивчено його застосування в прикладних задачах математичної фізики. Водночас, для рівнянь гіперболічного типу класичний принцип максимуму не виконується, але виникає потреба в його доведенні, навіть в слабкому вигляді, та його подальшому застосуванні як дієвого інструменту дослідження якісних властивостей розв'язків рівнянь гіперболічного типу. Наразі є лише деякі результати, в яких було побудовано принцип максимуму для гіперболічних рівнянь та систем другого порядку. Отже, дослідження аналогів принципу максимуму для різноманітних рівнянь гіперболічного типу є актуальною проблемою в теорії рівнянь в частинних похідних.

Об'єкт дослідження: Хвильове рівняння, принцип максимуму, задача Коші для рівняння коливання струни з молодшими членами; задачі на характеристиках.

Предмет дослідження: Аналог принципу максимум для рівнянь гіперболічного типу. Мета роботи: Доведення аналогу принципу максимуму для рівнянь гіперболічного типу з молодшими членами. Для реалізації поставленої мети в роботі вирішено наступні завдання: вивчено метод отримання принципу максимуму для простішого гіперболічного рівняння коливання одновимірної струни без молодших членів, який полягає в методі характеристик, та застосуванні теореми Стокса у випадку класичних розв'язків; отримано за допомогою вивченого методу аналогу принципу максимуму для хвильового рівняння з молодшим членами типу амплітуд; отримано слабкий принцип максимуму для хвильового рівняння з молодшими членами першого порядку. Науковою новизною роботи є доведення принципу максимуму для гіперболічних рівнянь другого порядку з молодшими членами, який використовується при доведенні теореми єдиності та неперервної залежності розв'язку мішаних задач, а також задачі Коші для таких рівнянь. Наведено також фізичні моделі та їх аналіз, які приводять для рівнянь в частинних похідних даного виду.

Ключові слова: метод характеристик, рівняння в частинних похідних другого порядку гіперболічного типу, хвильове рівняння, слабкий принцип максимуму, сильні розв'язки, теорема Стокса.

1. Вступ

Принцип максимуму є дієвим інструментом для дослідження якісних властивостей розв'язків рівнянь в частинних похідних. Як відомо з курсу рівнянь математичної фізики, для рівнянь еліптичного та параболічного типу принцип максимуму є дослідженим фактом, а також вивчено його застосування в прикладних задачах математичної фізики. Він дозволяє встановлювати як якісні властивості фізичних процесів, які описуються за допомогою еліптичних та параболічних рівнянь в частинних похідних, так і досліджувати подальші властивості розв’язків таких рівнянь, а також крайових, мішаних та початкових задач для них. Так, за допомогою встановленого класичного принципу максимуму для рівнянь еліптичного та параболічного типів, доволі просто довести властивості єдиності розв’зку деяких задач, а також неперервну залежність від початкових даних, що є важливішою властивістю в подальшому їх застування під час опису фізичних процесів.

Водночас для рівнянь гіперболічного типу класичний принцип максимуму не виконується, водночас, з огляду на вищесказане, його доведення навіть в слабкому сенсі, є важливою проблемою для подальшого дослідження якісних властивостей розв’язків задач для рівнянь гіперболічного типу. Отже, дослідження цього питання є актуальної проблемою теорії рівнянь математичної фізики.

Вперше доведення принципу максимуму для найпростішого рівняння гіперболічного типу, рівняння коливання одновимірної струни, зв’явилося в роботі Agmon S., Nirenberg, Protter M. в 1953 році, пізніше дослідженням цього питання для гіперболічних рівнянь другого порядку загального вигляду займалися Protter M. H., Weinberger H. [1], які в своїй роботі встановили аналог принципу максимуму для хвильового рівняння, а також розширили свій результат для гіперболічних рівнянь загального вигляду, в тому числі, зі змінними коефіцієнтами та молодшими членами першого порядку. Усі розв’язки, які розглядалися в згаданих роботах, були класичними.

Mawhin J., Ortega R., Robles-Perez A. [2] було доведено принцип максимуму для слабких обмежених розв’язків $u \in L^{\infty}(R+T^3)$ телеграфного рівняння з параметром λ у тривимірному просторі по просторовій змінній:

$$u_{tt} - \triangle_x u + c u_t + \lambda u = f(t,x),$$

де $c > 0$, $\lambda \in (0, c^2/4]$ і $f \in L^{\infty}(R+T^3)$. Було вказані точні межі на параметр λ, а також встановлено необхідність умови $c > 0$ для виконання принципу максимуму. Також Clain S. [4] було отримано принцип максимуму для рівнянь гіперболічного типу за допомогою чисельних методів теорії алгоритмів.

У випадку періодичних розв’язків принцип максимуму є природним і був доведений Wang F., An Y.[5] і Li Y.[6] у зв’язку з існуванням та кратністю додатних періодичних розв’язків для нелінійної системи телеграфних рівнянь. Аналог принципу максимуму також досліджувався в роботах Duffin R. J.[7], Protter M. H.[8], Sather D.[9], [10], Sousa R., Guerra M., Yakubovich S.[11], Sloss J. M., Sadek I. S., Bruch Jr. J. C.[12].

В основі даної роботи лежить встановлення аналогу принципу максимуму для рівнянь коливання струни з молодшими членами. Як було вище зазначено, принцип максимуму може використовуватись лише для еліптичних і параболічних рівнянь та дає можливість дослідити якісні властивості розв'язків задач математичної фізики. Ці властивості (єдиність та неперервна залежність розв’язку від початкових даних) задовольняють два пункти означення коректності за Адамаром і є важливим інструментом під час фізичної інтерпретації результатів. Також в роботі буде розглянуто розширений результат для гіперболічного рівняння з молодшими членами першого порядку та змінними коефіцієнтами:

$$L[u] \equiv au_{xx} + 2bu_{xt} + cu_{tt} + du_x + eu_t,$$

де a, b, c двічі неперервно диференційовані, а d та e неперервно диференційовані функції x і t.

Аналог принципу максимуму для гіперболічних рівнянь можливо побудувати лише в слабкому сенсі, в термінах оцінок. Так, в роботі, слідуючи Mawhin J., Ortega R., Robles-Perez A. [2], ми використовуємо наступне означення слабкого принципу максимум для рівнянь гіперболічного типу:

Означення 1. [2] Нехай $L = Lu$ деякий лінійний диференціальний оператор, діючий на функціях $u : D \to R$, визначених на деякій допустимій [1] множині D. Нехай також ці функції належать деякій сім'ї B, яка складається з граничних, початкових, мішаних або будь-яких інших умов. Будемо казати, що оператор L задовольняє принципу максимуму в слабкому сенсі, якщо з умови

$$L \geq 0,\ u \in B,$$

випливатиме, що $u \geq 0$ в кожній точці області D.

2. Аналог принципу максимуму для одновимірного хвильового рівняння

Принцип максимуму в класичному сенсі не виконується для розв'язків гіперболічних рівнянь і нерівностей. Дійсно, для найпростішого випадку одновимірного рівняння коливання струни

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

легко побачити, що максимум непостійного розв'язку u на множині $D = \{0 < x < \pi, 0 < t < \pi\}$ може знаходитися у внутрішній точці. Дійсно, функція

$$u = \sin x \cdot \sin t$$

є розв'язком наведеного вище рівняння та досягає максимуму в квадраті D у внутрішній точці $(\pi/2, \pi/2)$ цього квадрату. Щоб знайти можливий варіант принцип максимуму для гіперболічних рівнянь, ми досліджуємо природу коректно поставлених граничних та початкових умов для них.

Хвильове рівняння (1) описує поперечний рух однорідної струни під час натягу. Найелементарнішою задачею для такої системи є задача Коші, а також мішані задачі. Розглянемо спочатку задачу Коші: задамо u, $\partial u/ \partial t$ при $t = 0$ на деякому інтервалі $2\alpha \leq x \leq 2\beta$.

Фізична інтерпретація принципу максимуму означає, що рух однозначно визначається в межах так званого характеристичного трикутника, тобто трикутника, сторони якого складаються з інтервалу $2\alpha \leq x \leq 2\beta$, $t = 0$ та утворюють з характеристиками кут $\pm\pi/4$ (див. Рис.1). Демонстрація полягає в отриманні явного розв'язку цієї задачі методом Рімана.

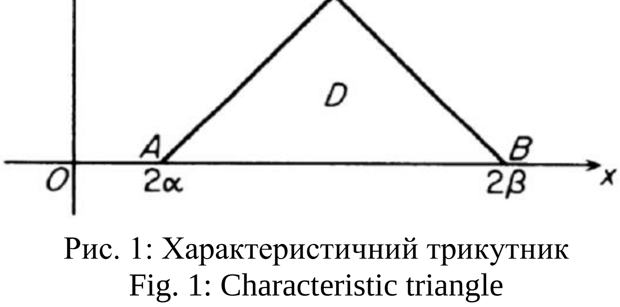

Рис. 1: Характеристичний трикутник
Fig. 1: Characteristic triangle

Нехай u двічі неперервно диференційована функція і диференціальний оператор

$$L[u] \equiv u_{xx} - u_{tt}$$

задано в характеристичному трикутнику D з вершинами $A(2\alpha, 0)$, $B(2\beta, 0)$ і $C(\alpha + \beta, \beta - \alpha)$.

Розглянемо вираз

$$\iint_D L[u]dxdt = \iint_D (u_{xx} - u_{tt})dxdt,$$

і застосуємо до нього теорему Стокса:

$$\iint_D L[u]dxdt = \int_A^B u_t dx + \int_B^C (u_x dt + u_t dx) + \int_C^A (u_x dt + u_t dx).$$

Оскільки $dx = -dt$ вздовж відрізка BC і $dx = dt$ вздовж CA, маємо:

$$\iint_D L[u]dxdt = \int_A^B u_t dx - \int_B^C (u_x dx + u_t dt) + \int_C^A (u_x dx + u_t dt).$$

Звідки:

$$\iint_D L[u]dxdt = \int_A^B u_t dx + u(A) + u(B) - 2u(C)$$

або

$$u(C) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2}\int_A^B u_t dx - \frac{1}{2}\iint_D L\,[u]dxdt. \qquad (2)$$

Таким чином, значення u в вершині C характеристичного трикутника однозначно визначається в $u(2\alpha, 0), u(2\beta, 0)$, $\partial u/\ \partial t$ для $2\alpha < x < \ 2\beta$, $t = 0$ і $L[u]$ в D.

Зокрема, ми бачимо, що якщо $L[u] \geq 0$ в D та

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \leq 0,\ 2\alpha \leq x \leq 2\beta,$$

(3)

то

$$u(C) \leq \frac{1}{2}[u(A) + u(B)]. \qquad (4)$$

Якщо ми візьмемо будь-яку точку C' в межах характеристичного трикутника ABC, ми можемо побудувати прямокутний рівнобедрений трикутник $A'B'C'$ з A' і B' на вісі Ox і прямим кутом в C'. Тоді ми знаходимо таким же чином, що

$$u(C') \leq \frac{1}{2}[u(A') + u(B')].$$

З цієї нерівності видно, що значення u в трикутнику ABC не можуть перевищувати максимального значення u на початковому відрізку прямої AB. Таким чином, якщо u задовольняє (3) і (4), її максимум на $D\ \cup \partial D$ повинен досягатись на початковій прямій AB.

Цей результат є слабким принципом максимуму, оскільки він не дає жодної інформації про те, чи може функція досягти свого максимуму у внутрішній точці. Власне кажучи, функція

$$u(x, t) = \cos x \cdot \cos t$$

задовольняє $L[u] = 0$, також

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Свій максимум u досягає на $(0{,}0)$ і $(2\pi, 0)$, але він також досягається в точці $(\pi/2, \pi/2)$.

Співвідношення (2) показують, що якщо функція $u_t(x,0)$ є від'ємною на AB або якщо $L[u] > 0$ в D то значення u в C строго менше, ніж середнє значення A і B . У цій ситуації ми бачимо, що якщо M позначає максимум u на AB, то $u < M$ в D.

3. Принцип максимуму для рівняння коливання з молодшими членами.

В цьому розділі буде доведено основні результати роботи: принцип максимуму для гіперболічних рівнянь з молодшими членами.

Теорема 1. Нехай $u \in C^2(D)$ і задовольняє

$L[u] \equiv u_{xx} - u_{tt} + u = f(x,t) \geq 0$ в деякій допустимій області D. Нехай також виконуються наступні умови:

$$u(x,0) \leq M < 0, u_t(x,0) \leq 0.$$

Тоді $u \leq 0$ в D.

Доведення. Застосуємо теорему Стокса до заданого оператора $L[u]$ і отримаємо:

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \iint\limits_D (u_{xx} - u_{tt} + u)dxdt =$$

$$= \iint\limits_D u\,dxdt + \int\limits_A^B u_t dx + \int\limits_B^C (u_x dt + u_t dx) + \int\limits_C^A (u_x dt + u_t dx).$$

Проінтегруємо останню рівність вздовж характеристик рівняння: $dx = -dt$ вздовж відрізка BC (перша сім'я характеристик) і $dx = dt$ вздовж CA (друга сім'я характеристик). Отже, отримаємо наступне:

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \iint\limits_D u\,dxdt + \int\limits_A^B u_t dx - \int\limits_B^C (u_x dt + u_t dx) + \int\limits_C^A (u_x dt + u_t dx),$$

або

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \iint\limits_D u\,dxdt + \int\limits_A^B u_t dx + u(A) + u(B) - 2u(C).$$

Враховуючи $L[u] \geq 0$ в області D, оцінимо $u\,(C)$:

$$u(C) \leq \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2}\iint\limits_D u\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_A^B u_t dx.$$

За умовами теореми $u(x,0) \leq M < 0$, $u_t(x,0) \leq 0$, отже, застосовуючи ці умови, отримаємо:

$$u(C) \leq \tfrac{1}{2}[u(A) + u(B)]. \qquad (5)$$

З отриманої нерівності бачимо, що значення u в трикутнику ABC не можуть перевищувати максимального значення u на початковому відрізку прямої AB.

Оскільки точки A та B лежать на прямій $t = 0$, маємо:

$$u(C) \leq 0. \qquad (6)$$

Оскільки точка C, через яку було проведено сім'ї характеристик заданого рівняння з області D є довільною, приходимо до результату теореми.

Аналогічний результат має місце і для рівняння коливання струни з молодшими членами першого порядку:

Теорема 2. Нехай $u \in C^2(D)$ і задовольняє $L[u] \equiv u_{xx} - u_{tt} + u_x = f(x,t) \geq 0$ в деякій допустимій області D. Нехай також виконуються наступні умови:

$$u(x,0) \leq M < 0, u_t(x,0) \leq 0.$$

Тоді $u \leq 0$ в D.

Доведення. Застосовуючи теорему Стокса для оператора $L[u] \equiv u_{xx} - u_{tt} + u_x$, отримаємо:

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \iint\limits_D (u_{xx} - u_{tt} + u_x)dxdt =$$

$$= \iint\limits_D u_x\, dxdt + \int\limits_A^B u_t dx + \int\limits_B^C (u_x dt + u_t dx) + \int\limits_C^A (u_x dt + u_t dx).$$

Застосовуючи, як і в теоремі 1, інтегрування по характеристикам рівняння, проведених через довільну точку $C \in D$ до перетину з «прямою початкових даних», *t=0*, матимемо:

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \iint\limits_D u_x\, dxdt + \int\limits_A^B u_t dx - \int\limits_B^C (u_x dt + u_t dx) + \int\limits_C^A (u_x dt + u_t dx),$$

$$\iint\limits_D L[u]dxdt = \iint\limits_D u_x\, dxdt + \int\limits_A^B u_t dx + u(A) + u(B) - 2u(C).$$

За умовами теореми $L[u] \geq 0$, $u(x,0) \leq M < 0$, $u_t(x,0) \leq 0$, отже, приходимо до наступної оцінки:

$$u(C) \leq \frac{1}{2}[u(A) + u(B)]$$

З отриманої нерівності бачимо, що значення u в трикутнику ABC не можуть перевищувати максимального значення u на відрізку початкових даних, прямій AB.

Оскільки точки A та B лежать на прямій $t = 0$, маємо:

$$u(C) \leq 0.$$

Оскільки точка $C \in D$ є довільною точкою допустимої області D, приходимо до результату теореми.

4. Висновки

В роботі була розглянута актуальна проблема доведення аналогу принципу максимума для рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу, для яких класичний принцип максимуму не має місця. Враховуючи формулювання принципу максиму для рівнянь гіперболічного типу попередніх робіт, встановлено аналог принципу максимуму для класичного розв'язку задачі Коші рівняння коливання одновимірної струни з молодшими членами типу амплітуд, а також першого порядку. Доведення спирається на результат, запропонований в роботі [1], і включає в себе метод характеристик, що є природнім для рівнянь гіперболічного типу, а також теорему Стокса, оскільки мова йде про класичні розв'язки достатньої гладкості.

Подяки

Робота виконання в рамках залучення молодих вчених (студентів) до виконання держбюджетних тем МОН, номер держреєстрації 0121U109525, а також українсько-німецького проекту A131968 «From Modeling and Analysis to Approximation."

Список використаної літератури:

1. Protter M. Maximum principle in Differential Equations / M. Protter, H. Weinberger // Springer-Verlag New York. Inc. – 1984. – 261 p. – Режим доступу: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5282-5
2. Mawhin J. Maximum principle for bounded solutions of the telegraph equation in 2- and 3-dim. and applications / J. Mawhin, R. Ortega, A. Robles-Perez // Journal of Differential Equations. – 2005. – Vol. 208, No. 1. – pp. 42–63. – Режим доступу: https://doi.org/10.1016/S1631-073X(02)02406-8
3. Agmon S. A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type / S. Agmon, L. Nirenberg, M. Protter // Comm. on Pure and Applied Math. – 1953. – Vol. 6, No. 4. – pp. 455–470. – Режим доступу: https://doi.org/10.1002/cpa.3160060402
4. Clain S. Finite volume maximum principle for hyperbolic scalar problems / S. Clain // SIAM J. Num. Anal. – 2013. – Vol. 51, No. 1. – pp. 467-490. – Режим доступу: https://doi.org/10.1137/110854278
5. Wang F. Existence and multiplicity results of positive doubly periodic solutions for nonlinear telegraph system / F. Wang, Y. An// Journal of Math. Analysis and Application. – 2009. – Vol. 349, No. 1. – pp. 30–42. – Режим доступу: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.08.003
6. Li Y. Positive doubly periodic solutions of nonlinear telegraph equations / Y. Li // Nonlilear Analysis. – 2003. – Vol. 30, No. 3. – pp. 1104-1125. – Режим доступу: https://doi.org/10.3934/era.2022059
7. Duffin R. J. The maximum principle and biharmonic functions / R. J. Duffin // Journal of Math. Anal. and Applic. – 1961. – pp. 399-405. – Режим доступу: https://doi.org/10.1016/0022-247X(61)90066-X
8. Protter M. H. A maximum principle for hyperbolic equations in a neighborhood of an initial line / M. H. Protter // Trans. of the Amer. Math. Soc. – 1958. – Vol. 87, No. 1. – pp. 119-129. – Режим доступу: https://www.ams.org/journals/tran/1958-087-01/S0002-9947-1958-0097611-2/S0002-9947-1958-0097611-2.pdf
9. Sather D. A maximum property of Cauchy's problem for the wave operator / D. A Sather // Arch. For Rat. Mech. and Anal. – 1966. – Vol. 19, No. 1. – pp. 303-309. – Режим доступу: https://msp.org/pjm/1966/19-1/pjm-v19-n1-p12-s.pdf
10. Sather D. Maximum and monotonicity properties of initial-boundary value problems for hyperbolic equations / D. Sather // Pacific J. of Math. – 1966. – Vol. 19, No. 1. – pp. 141-157. – Режим доступу: https://msp.org/pjm/1966/19-1/pjm-v19-n1-p12-s.pdf
11. Sousa R. (2019). The hyperbolic maximum principle approach to the construction of generalized convolutions / R. Sousa, M. Guerra, S. Yakubovich // In Special Functions and Analysis of Differential Equations. – 2019. – pp. 119-159 – Режим доступу: https://doi.org/10.48550/arXiv.1901.10357
12. Sloss J. M. Maximum principle for the optimal control of a hyperbolic equation in one space dimension, part 1: Theory / J. M. Sloss, I. S. Sadek, Jr. Bruch, S. Adali // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1995. – Vol. 87. – pp. 33–45. – Режим доступу: https://doi.org/10.1007/BF02192565

References:

1. Protter M., Weinberger H. (1984). Maximum principle in Differential Equations, *Springer-Verlag New York. Inc.*, 261 p. Retrieved from https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5282-5
2. Mawhin, J., Ortega, R., & Robles-Pérez, A. M. (2005). Maximum principles for bounded solutions of the telegraph equation in space dimensions two and three and applications. *Journal of Differential Equations, 208(1),* 42-63. https://doi.org/10.1016/S1631-073X(02)02406-8
3. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.H. (1953). A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type, *Comm. on Pure and Applied Math., 6(4),* pp. 455–470. Retrieved from https://doi.org/10.1002/cpa.3160060402
4. Clain, S. (2013). Finite volume maximum principle for hyperbolic scalar problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *51*(1), 467-490. Retrieved from https://doi.org/10.1137/110854278
5. Wang, F., & An, Y. (2009). Existence and multiplicity results of positive doubly periodic solutions for nonlinear telegraph system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *349*(1), 30-42. Retrieved from https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.08.003
6. Li, Y. (2003). Positive doubly periodic solutions of nonlinear telegraph equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *5*(3), 245-254. Retrieved from https://doi.org/10.3934/era.2022059
7. Duffin, R. J. (1961). The maximum principle and biharmonic functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3(3),* 399-405. Retrieved from https://doi.org/10.1016/0022-247X(61)90066-X
8. Protter, M. H. (1958). A maximum principle for hyperbolic equations in a neighborhood of an initial line. *Transactions of the American Mathematical Society*, *87*(1), 119-129. Retrieved from https://www.ams.org/journals/tran/1958-087-01/S0002-9947-1958-0097611-2/S0002-9947-1958-0097611-2.pdf
9. Sather, D. (1966). A maximum property of Cauchy's problem for the wave operator. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, *21*(4), 303-309. Retrieved from https://msp.org/pjm/1966/19-1/pjm-v19-n1-p12-s.pdf
10. Sather, D. (1966). Maximum and monotonicity properties of initial boundary value problems for hyperbolic equations. *Pacific Journal of Mathematics*, *19*(1), 141-157. Retrieved from https://msp.org/pjm/1966/19-1/pjm-v19-n1-p12-s.pdf
11. Sousa, R., Guerra, M., & Yakubovich, S. (2019). The hyperbolic maximum principle approach to the construction of generalized convolutions. *In Special Functions and Analysis of Differential Equations* (pp. 119-159). Chapman and Hall/CRC. Retrieved from https://doi.org/10.48550/arXiv.1901.10357
12. Sloss, J. M., Sadek, I. S., Bruch, J. C., & Adali, S. (1995). Maximum principle for the optimal control of a hyperbolic equation in one space dimension, part 1: theory. *Journal of optimization theory and applications*, *87*, 33-45. Retrieved from https://doi.org/10.1007/BF02192565

Yu. A. Andreieva
Master of mathematics,
Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine,
jandreieva7@gmail.com

K. O. Buryachenko
Candidate physical and mathematical sciences, Docent,
Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine
k.buriachenko@donnu.edu.ua

ANALOG OF MAXIMUM PRINCIPLE FOR THE WAVE PROCESSES

The maximum principle for partial differential equations plays essential role in various applicatins. There is usually a natural physical interpretation of the maximum principle in those problems in differential equations that arise in physics. In such situations the maximum principle helps us apply physical intuition to mathematical models. Consequently, anyone learning about the maximum principle becomes acquainted with the classically important partial differential equations and, at the same time, discovers the reasons for their importance. The proofs required to establish the maximum principle are extremely elementary. By concentrating on those applications which can be derived from the maximum principle by elementary methods, such as characteristics methods and Stock's theorem, Green's theorem, integrating by characteristics and others. The maximum principle enables us to obtain information about solutions of differential equations without any explicit knowledge of the solutions themselves. In particular, the maximum principle is a useful tool in the approximation of solutions, a subject of great interest to many scientists. For the cases of elliptic and parabolic partial differential equations maximum principle is well-known fact, at the same time, in the case of hyperbolic equations classical formulation of maximum principle is not valid.

This paper deals with maximum principle for second order hyperbolic equatins this lower terms. The forms that these principles take reflect the structure of properly posed problems for hyperbolic equations. Both the statements of the theorems and the methods of proof for hyperbolic operators, presented in this paper are quite different from those for elliptic and parabolic operators. In particular, the role of characteristic curves and surfaces becomes evident in the hyperbolic case. The maximum principle occurs in so many places and in such varied forms that we have found it impossible to discuss some topics which we had originally hoped to treat. For example, the maximum principle for finite difference operators is omitted entirely. The mains results of the paper are theorems on maximum principle for second order hyperbolic equations, lower terms of which contain amplitudes and first-order derivatives.

Keywords: method of characteristics, hyperbolic partial differential equations of the second order, wave equation, vibrating string equation, maximum principle, classical solutions, Stock's theorem.

Одержано редакцією 27.06.2022
Прийнято до друку 04.07.2022