

ORCID: 0009-0007-1750-8395

А. В. ГончаренкоМагістрантка, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького,
Черкаси, Українаhoncharenko.anna1619@vu.cdu.edu.ua

ORCID: 0000-0003-2737-2050

С. В. БабенкоКандидат фізико-математичних наук, старший викладач, Черкаський національний
університет імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Українаdifferenceeq@vu.cdu.edu.ua

DOI: 10.31651/2076-5851-2023-25-36

PACS 02.30.Jr, 02.70.-c,
05.70.Fh, 05.70.Ln**МІЖДИСЦИПЛІНАРНИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЄКТ «ОБЧИСЛЕННЯ
ЦЕНТРА МАС НАХИЛЕНОЇ СКЛЯНКИ З ВОДОЮ»**

У статті запропоновано міждисциплінарний навчальний проєкт «Обчислення центра мас нахиленої склянки з водою», метою якого є закріплення понять статичного моменту і центра мас тіла, методів дослідження на екстремум функції багатьох змінних, шляхом розв'язання дослідницької задачі. Задача полягає в тому, щоб визначити, скільки води треба налити у склянку, що стоїть нахилено на ребрі, щоб її центр мас після зрівноваження зайняв найнижче положення. Задачі про баланс досить часто зустрічаються у мережі інтернет: користувачі завантажують відео, на яких демонструють своє вміння досягти стійкої рівноваги різних предметів (склянок, банок, пляшок, каменів і тд.). Виникає природне запитання: як досягти балансу якогось предмету? Здатність предмета перебувати у стійкій рівновазі тісно пов'язана з положенням його центра мас. Положення центра мас склянки з водою залежить від рівня рідини в ній та від нахиленості склянки. В рамках проєкта ця залежність досліджується методами математичного аналізу та чисельними методами, які реалізуються інструментами з пакета прикладних програм Matlab. У статті наводиться розв'язання задачі про центр мас нахиленої склянки з водою, що лежить в основі проєкта, для конкретних значень параметрів склянки. Розв'язання має на меті допомогти викладачеві організувати роботу студентів над проєктом.

У рамках проєкта студентам пропонується: а) розв'язати задачу про баланс склянки теоретично; б) провести дослід, у якому спробувати зрівноважити на монеті склянку з різною кількістю води, зокрема, з тою кількістю, яка була отримана в результаті теоретичного дослідження; в) зробити висновки за результатами проведеного експерименту. Важливою рисою проєкта є те, що у процесі роботи над ним студенти також знайомляться з дисциплінами «Теоретична механіка» і «Програмування та математичні пакети», що викладаються згідно навчальних планів студентам спеціальності 111 Математика у Черкаському національному університеті імені Б. Хмельницького.

Ключові слова: центр мас, рівновага, баланс, склянка, міждисциплінарний навчальний проєкт, matlab.

1. Вступ

Згідно [3], «проектне навчання – це метод, навчаючись за яким, учні, певний час досліджуючи і реагуючи на справжні, цікаві та складні питання, отримують потрібні знання та навички». У визначенні йдеться про учнів, однак видається, що такий тип навчання актуальний і для здобувачів вищої освіти, оскільки вони, як і учні, навчаються. У даній статті пропонується міждисциплінарний проєкт «Обчислення центра мас нахиленої склянки з водою». Проєкт пропонується студентам 2-го курсу спеціальності 111 Математика в рамках курсу «Математичний аналіз: функції кількох змінних». Метою проєкту є закріплення понять статичного моменту та центра мас тіла, методів дослідження на екстремум функцій багатьох змінних та водночас опанування елементів програмування у середовищі Matlab і знайомство з елементами теоретичної механіки. Таким чином, у процесі роботи над проєктом, студенти закріплюють знання з дисципліни «Математичний аналіз: функції кількох змінних» та знайомляться з дисциплінами «Теоретична механіка» і «Програмування та математичні пакети», що викладаються згідно навчальних планів студентам спеціальності 111 Математика.

В основі проєкта лежить одна задача про баланс склянки, заповненої водою (або іншою рідиною). Різні задачі про баланс можна зустріти не тільки в літературі з теоретичної механіки чи фізики, але й і в багатьох не пов'язаних з наукою чи навчанням ресурсах. Так, у різних мережах інтернету люди розповідають та показують, як їм вдається досягти балансу декількох каменів, що лежать один на одному, або порожніх пляшок, з'єднаних ремонтними ключами. Є також ті, хто ставлять склянку ребром дна на монету так, що склянка перебуває у стійкій рівновазі (див., наприклад, [6], [8]). Або ж бляшанку з газованим напоєм ставлять просто ребром на стіл і вона теж перебуває у стані стійкої рівноваги. Щодо балансу склянки, то виконавці фокуса використовують монету з погруддям і саме на нього ставлять ребром дна склянку. Виникає природне запитання: за рахунок чого склянка перебуває у стійкій рівновазі? Ймовірно, завдяки тому, що вона ребром свого дна спирається на монету у трьох місцях: на погруддя на аверсі, на буртик монети [2] (піднесений край монети) та на гладеньку сторону монети. Таким чином, утворюється область опори: трикутник. Як відомо зі статички твердих тіл [1], якщо центр мас твердого тіла проєктуватиметься в область опори, то тверде тіло перебуватиме у стійкій рівновазі. Однак, для твердих тіл може бути і так, що центр мас проєктується за межі області опори, але стійкість рівноваги при цьому зберігається. У цьому випадку рівновага, як видається, забезпечуватиметься за рахунок сил тертя у точках дотикання. Цю ситуацію можна описати на прикладі простішої моделі. Розглянемо брус, вставлений у ямку так, як показано на рисунку 1.

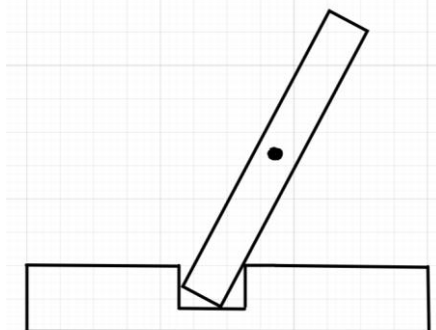


Рис. 1. Стійка рівновага бруса, вставленого у ямку.
Fig. 1. The stable equilibrium of a beam placed into a hole.

Припускається, що брус однорідний. Чорною точкою позначено його центр мас. Як бачимо, центр мас проєктується поза область опори, але брус все одно може

залишатися у стійкій рівновазі. Очевидно, що якщо ми почнемо збільшувати довжину бруса, то він буде все більш схильний «завалитися». І знайдуться такі розміри, при яких він таки випаде з ямки. І навпаки: чим нижчим буде центр мас бруса, тим більш стійкою буде його рівновага, тобто, тим більшими мають бути початкові збурення, які зможуть вивести такий брус з рівноваги. Щось подібне, ймовірно, спостерігається і для склянки з водою: при зміні рівня води у ній буде змінюватися і висота центра мас над площиною монети і тому буде змінюватися ступінь стійкості рівноваги склянки. І для того, щоб досягти максимального рівня стійкості, слід забезпечити якомога нижчий центр мас. *У цьому і полягає задача про баланс склянки, що лежить в основі проєкту: визначити, скільки води треба налити у склянку, що стоїть нахилено на ребрі, щоб її центр мас після зрівноваження зайняв найнижче положення.*

Студентам пропонується: а) розв'язати задачу про баланс склянки теоретично; б) провести дослід, у якому спробувати зрівноважити на монеті склянку з різною кількістю води, зокрема, з тою кількістю, яка була отримана в результаті теоретичного дослідження; в) зробити висновки за результатами проведеного експерименту. Після розв'язання цієї задачі студентам можуть бути запропоновані для самостійного розв'язання модифікації описаної задачі про центр мас склянки, коли накладаються додаткові умови: 1) склянка наповнена декількома рідинами, які розміщуються шарами, що не змішуються (композитний матеріал), наприклад, десертом; 2) склянка має форму, відмінну від циліндричної.

Далі наведено розв'язок задачі, описаної вище, керуючись яким викладач може організувати роботу студентів над проєктом.

2. Допоміжні відомості про центр мас та розв'язування задач оптимізації за допомогою Matlab

2.1. Центр мас плоскої пластини

Центр мас – характеристика механічної системи, яка має важливе значення в теоретичній механіці. Зокрема, теорема про центр мас механічної системи [1] дозволяє виводити рівняння руху. Рух твердого тіла можна розглядати як суперпозицію руху центра мас і обертального руху тіла навколо його центра мас [4]. Центр мас при цьому рухається так само, як рухалося б тіло з такою ж масою, але нескінченно малими розмірами (матеріальна точка). Останнє означає, зокрема, що для опису цього руху застосовні всі закони Ньютона. У багатьох випадках можна взагалі не враховувати розміри і форму тіла і розглядати тільки рух його центра мас. Як відомо (див., наприклад, [5] або [9]), координати (x_C, y_C) центра мас плоскої пластини D , для якої відомий закон розподілу мас $\mu(x, y)$, обчислюються за формулами:

$$x_C = \frac{M_y}{m}; \quad y_C = \frac{M_x}{m}, \quad (1)$$

де $m = \iint_D \mu(x, y) dx dy$ – маса пластини, $M_y = \iint_D x \mu(x, y) dx dy$ – статичний момент пластини відносно осі Oy , $M_x = \iint_D y \mu(x, y) dx dy$ – статичний момент пластини відносно осі Ox .

2.2. Розв'язування задач оптимізації в середовищі Matlab. Функція *fmincon*

Середовище Matlab дозволяє розв'язувати різні задачі оптимізації. Однією з потужних функцій, призначених для цього, є функція *fmincon*, опис якої можна знайти, наприклад, на офіційному сайті компанії The MathWorks [10], у розділі з назвою Help Center, за посиланням [7]. Згідно опису цієї функції, існує декілька її модифікацій. Перелік їх наведено нижче:

```

x = fmincon(fun,x0,A,b)
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq)
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options)
x = fmincon(problem)
[x,fval] = fmincon(____)
[x,fval,exitflag,output] = fmincon(____)
[x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] = fmincon(____)

```

Функція `fmincon` знаходить мінімум функції $f(x)$ за умов:

$$\begin{aligned}
 c(x) &\leq 0 \\
 ceq(x) &= 0 \\
 A \cdot x &\leq b \\
 Aeq \cdot x &= beq \\
 lb &\leq x \leq ub,
 \end{aligned}$$

де b і beq – вектори, A і Aeq – матриці, $c(x)$ і $ceq(x)$ – векторні функції (функція, значенням якої є вектор), а $f(x)$ – скалярна функція. $f(x)$, $c(x)$ і $ceq(x)$ можуть бути нелінійними функціями. x , lb і ub можна подати як вектори або матриці.

Залежно від того, яка модифікація з переліку вище використовується, умови будуть входити в неї в той чи інший спосіб. Розглянемо таку модифікацію (четверта у переліку):

```
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)
```

Ця функція знаходить точку мінімуму x функції `fun`, з початковими умовами $x0$. Інші аргументи є параметрами, описаними вище. Якщо якоїсь з умов у задачі, яку необхідно розв'язати, немає, то це записується так. Припустимо, у даній задачі відсутня умова $A \cdot x \leq b$. У такому випадку в коді програми ми прописуємо:

```

A = [];
b = [];

```

Аналогічно чинять і з іншими умовами, яких немає у даній задачі.

Далі розглянемо приклад на застосування четвертої модифікації функції `fmincon` з переліку, наведеного вище. Приклад можна знайти у [7] (переклад авторський).

Приклад. Знайдіть точку мінімуму функції Розенброка на колі та за наявності додаткових обмежень. Задання функції:

```
fun = @(x) 100*(x(2)-x(1)^2)^2 + (1-x(1))^2;
```

Обмеження на змінні: $0 \leq x(1) \leq 0,5$, $0,2 \leq x(2) \leq 0,8$:

```

lb = [0,0.2];
ub = [0.5,0.8];

```

Коло має центр в точці $[1/3, 1/3]$ і радіус $1/3$. Обмеження задається за допомогою функції, названої `circlecon`:

```
function [c,ceq] = circlecon(x)
c = (x(1)-1/3)^2 + (x(2)-1/3)^2 - (1/3)^2;
ceq = [];
```

Оскільки лінійних обмежень немає, то для відповідних аргументів встановлюються значення [].

```
A = [];
b = [];
Aeq = [];
beq = [];
```

Вибираємо початкову точку, яка задовольняє всі обмеження.

```
x0 = [1/4,1/4];
```

Розв'язуємо задачу:

```
nonlcon = @circlecon;
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)
```

Знайдений локальний мінімум, який задовольняє обмеження.

```
Local minimum found that satisfies the constraints.
```

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in feasible directions, to within the value of the optimality tolerance, and constraints are satisfied to within the value of the constraint tolerance.

```
x =
    0.5000    0.2500
```

3. Задача про центр мас нахиленої склянки з водою

3.1. Постановка задачі та побудова математичної моделі

Розглянемо круглу склянку, у яку налита певна кількість води. Уявімо, що склянка поставлена на ребро і нахилена так, що вона перебуває у стані рівноваги. З огляду на те, що область опори є або точкою або достатньо малим многокутником (наприклад, трикутником), змодельюємо область опори склянки однією точкою і вважатимемо, що центр мас проектується у цю точку. Задача полягає у тому, щоб визначити, якій кількості води у склянці, розміщеній в описаний вище спосіб, відповідає найнижче положення її центра мас.

Змодельюємо склянку порожнинним циліндром радіуса r_0 зі стінками товщиною d . Дно є суцільним циліндром висотою h_0 і радіуса r_0 . З огляду на симетричність склянки, достатньо розв'язати задачу для осового перерізу склянки, що має вигляд U-подібної пластини. На рисунку 2 наведено схематичне зображення перерізу.

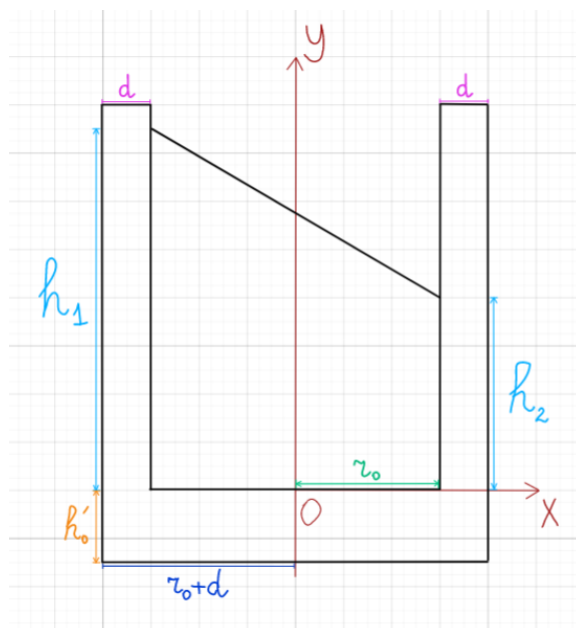


Рис. 2. Осьовий переріз склянки з водою
Fig. 2. The axial section of a glass of water.

На рисунку 2 через h_1 і h_2 позначено параметри, які описують рівень води в нахиленому стакані.

Для обчислення координат центра мас введемо систему координат так, як показано на рисунку 2. Використовуючи формули (1), знайдемо координати центра мас. Для цього потрібно знайти M_x , M_y та m . Так як досліджуване тіло складається з двох речовин, то m розпишеться на два інтеграли (по склу і по воді). А, отже, обчислення зводяться до обчислення площ перерізу стакану і води:

$$m = \mu_c \iint_{D_c} dx dy + \mu_v \iint_{D_v} dx dy$$

де D_c – область перерізу з рисунка 2, заповнена склом, D_v – область перерізу з рисунка 2, заповнена водою, μ_c , μ_v – величини, пропорційні густинам скла і води, відповідно (з одним і тим же коефіцієнтом пропорційності). Звідси слідує, що відношення $\frac{\mu_c}{\mu_v}$ рівне відношенню густин скла і води, тобто, наближено 2,6. Знаходимо $S_{\text{скла}}$ та $S_{\text{води}}$, що рівні інтегралам $\iint_{D_c} dx dy$ та $\iint_{D_v} dx dy$, відповідно. Отримаємо:

$$\begin{aligned} S_{\text{скла}} &= 2d \cdot (h_0 - h'_0) + 2h'_0(r_0 + d) \\ S_{\text{води}} &= \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot 2r_0 = r_0(h_1 + h_2) \end{aligned}$$

Звідси знаходимо масу m :

$$\begin{aligned} m &= \mu_c(2d \cdot (h_0 - h'_0) + 2h'_0(r_0 + d)) + \mu_v r_0(h_1 + h_2) \\ &= \mu_c(2dh_0 - 2dh'_0 + 2h'_0 r_0 + 2h'_0 d) + \mu_v r_0(h_1 + h_2) \\ &= \mu_c(2dh_0 + 2r_0 h'_0) + \mu_v r_0(h_1 + h_2) \end{aligned}$$

Отже, $m = \mu_c(2dh_0 + 2r_0 h'_0) + \mu_v r_0(h_1 + h_2)$.

Наступним кроком буде пошук M_x та M_y . Аналогічно, так як досліджуване тіло складається з двох речовин, то M_x та M_y розпишеться на два інтеграли (по склу і по воді).

У результаті проведених обрахунків одержуємо:

$$M_y = \mu_v \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \cdot \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} + \frac{h_2 - h_1}{2r_0} \cdot \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} \right)$$

$$M_x = \mu_B \left(\frac{(h_1 + h_2)^2}{8} + \frac{r_0(h_2 - h_1)^2}{2} \right) + \mu_c \left(\frac{d(h_0^2 - h_0'^2) - \left(r_0 d + \frac{d^2}{2} \right) \cdot (h_0^2 - h_0'^2)}{2} - r_0 h_0'^2 \right)$$

Тоді координати центра мас обчислюватимуться за формулами:

$$x_c = \frac{\mu_B \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \cdot \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} + \frac{h_2 - h_1}{2r_0} \cdot \frac{h_2^3 - h_1^3}{3} \right)}{\mu_c(2dh_0 + 2r_0h_0') + \mu_B r_0(h_1 + h_2)} \quad (2)$$

$$y_c = \frac{\mu_B \left(\frac{(h_1 + h_2)^2}{8} + \frac{r_0(h_2 - h_1)^2}{2} \right) + \mu_c \left(\frac{d(h_0^2 - h_0'^2) - \left(r_0 d + \frac{d^2}{2} \right) \cdot (h_0^2 - h_0'^2)}{2} - r_0 h_0'^2 \right)}{\mu_c(2dh_0 + 2r_0h_0') + \mu_B r_0(h_1 + h_2)} \quad (3)$$

Таким чином, координати центра мас є функціями від h_1 і h_2 , і від інших параметрів. Задача зводиться до того, щоб знайти, при яких h_1 і h_2 відстань від центра мас до точки N (кут склянки, на якому вона стоїть) буде найменшою (див. Рис. 3 нижче). При цьому слід врахувати, що склянка перебуває у стані рівноваги. Це означає, що її центр мас проектується у точку N , що математично можна описати так: $(M_c N) \perp (AB)$, тобто, пряма, що проходить через центр мас і точку опори стакану, перпендикулярна до рівня рідини у стакані. Таким чином, маємо задачу на умовний екстремум:

$$M_c N^2 = (x_c + r_0 + d)^2 + (y_c + h_0')^2 \rightarrow \min \quad (4)$$

за умови:

$$(M_c N) \perp (AB). \quad (5)$$

Або:

$$M_c N^2 = (x_c + r_0 + d)^2 + (y_c + h_0')^2 \rightarrow \min \quad (6)$$

за умови:

$$2r_0(x_c + r_0 + d) + (h_2 - h_1)(y_c + h_0) = 0. \quad (7)$$

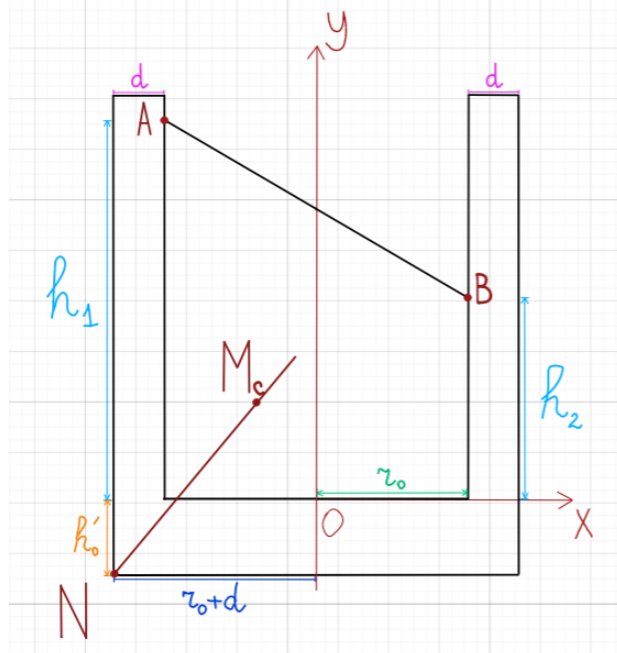


Рис. 3. Позначення точок A , B , N на осьовому перерізі склянки
Fig. 3. The designation of points A , B , N on the axial section of the glass

Задача (6) – (7) дещо спроститься, якщо ввести заміну:

$$p_1 = h_1 - h_2, p_2 = h_1 + h_2. \quad (8)$$

Тоді формули для обчислення координат центра мас матимуть вигляд:

$$x_c = \frac{\mu_b(-6r_0p_1p_2^2 + p_1^2(3p_2^2 + p_1^2))}{24r_0(\mu_c(2dh_0 + 2r_0h_0') + \mu_b r_0 p_2)} \quad (9)$$

$$y_c = \frac{\mu_b(\frac{3p_2^2 + 2r_0p_1^2}{12}) + \mu_c(d(h_0^2 - h_0'^2) - (r_0d + \frac{d^2}{2}) \cdot (h_0^2 - h_0'^2) - 2r_0h_0'^2)}{2(\mu_c(2dh_0 + 2r_0h_0') + \mu_b r_0 p_2)} \quad (10)$$

Відповідно, задача (6) – (7) перепишеться у вигляді:

$$M_c N^2 = (x_c + r_0 + d)^2 + (y_c + h_0')^2 \rightarrow \min \quad (11)$$

за умови:

$$2r_0(x_c + r_0 + d) - p_1(y_c + h_0') = 0, \quad (12)$$

де x_c і y_c обчислюються за формулами (9) – (10).

Якщо застосувати до цієї задачі теорію умовного екстремуму, то отримаємо систему трьох нелінійних рівнянь з параметрами, яку розв'язати аналітично проблематично. Тому розглянемо частинний випадок (для конкретної склянки): $h_0' = 2$ см; $d = 0,2$ см; $r_0 = 3,61$ см; $h_0 = 26$ см. У такому частинному випадку задача (11) – (12) матиме вигляд:

$$M_c N^2 = \left(\frac{21319,1 + 1191,65p_2 - 21,66p_1p_2^2 + 3p_1^2p_2^2 + p_1^4}{5595,56 + 312,77p_2} \right)^2 + \left(\frac{2077,9 + 3p_2^2 + 7,22p_1^2 + 173,28p_2}{1550 + 86,64p_2} \right)^2 \rightarrow \min$$

за умови: $f_1 = 0$, де

$$f_1 = 7,22 \cdot \left(\frac{21319,1 + 1191,65p_2 - 21,66p_1p_2^2 + 3p_1^2p_2^2 + p_1^4}{5595,56 + 312,77p_2} \right) - p_1 \cdot \left(\frac{2077,9 + 3p_2^2 + 7,22p_1^2 + 173,28p_2}{1550 + 86,64p_2} \right)$$

Для розв'язання цієї задачі скористаємося функцією `fmincon`, описаної вище. За допомогою цієї функції отримуємо точку мінімуму: $p_1 = 3.3830$; $p_2 = 13.7545$. Текст програми наведено нижче:

```
x0=[4.5,9.5];
A=[];
b=[];
Aeq=[];
beq=[];
lb=[-5,5];
ub=[14,14];
x=fmincon(@f,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@f1)
function c=f(p)
c=(-
21.66*p(1)*(p(2)^2)+3*(p(1)^2)*(p(2)^2)+(p(1)^4)+21319.1+1191.
65*p(2))/(5595.56+312.77*p(2))^2+(2077.9+3*(p(2)^2)+7.22*(p(
1)^2)+173.28*p(2))/(1550+86.64*p(2))^2;
end
function [c,ceq] = f1(p)
c = [];
ceq =
7,22*(-
21.66*p(1)*(p(2)^2)+3*(p(1)^2)*(p(2)^2)+(p(1)^4)+21319.1+1191.
```



```

65*p(2))/(5595.56+312.77*p(2))-
p(1)*((2077.9+3*(p(2)^2)+7.22*(p(1)^2)+173.28*p(2))/(1550+86.6
4*p(2)));
end

```

3. Результати

Враховуючи заміну (8), знайдемо h_1, h_2 , які визначають рівень води і нахил склянки: $h_1 = 8,565$; $h_2 = 5,185$. Звідси знаходимо рівень води у ненахиленому положенні: $\frac{(h_1+h_2)}{2} = 6,875$ см. Таким чином, якщо у склянку, що знаходиться у ненахиленому положенні, налити води до рівня 6,875 см, поставити її на ребро і нахилити так, щоб вона перебувала у стані рівноваги, то центр мас такого тіла займатиме найнижче положення (порівняно з положеннями центра мас для інших рівнів води).

За результатами проведених обчислень студентам пропонується провести експеримент, який полягає в тому, щоб спробувати досягти рівноваги на монеті для склянки із заданими параметрами і рівнем води. Нижче наведено результати такого експерименту, для якого була вибрана монета номіналом 10 грн. В результаті декількох спроб вдалося досягнути рівноваги (див. рисунки 4а-4в).



а

б

в

Рис. 4. Експеримент зі склянкою з водою при значеннях параметрів $h_0' =$

2 см; $d = 0,2$ см; $r_0 = 3,61$ см; $h_0 = 26$ см.

Fig. 4. The experiment with a glass of water with $h_0' = 2$ см; $d = 0,2$ см; $r_0 = 3,61$ см; $h_0 = 26$ см.

4. Висновки

У статті запропоновано міждисциплінарний навчальний проєкт «Обчислення центра мас нахиленої склянки з водою». Суть проєкту полягає в тому, що студенти розв'язують дослідницьку задачу про баланс склянки з водою, і в процесі розв'язання закріплюють знання з дисципліни «Математичний аналіз: функції кількох змінних» та знайомляться з дисциплінами «Теоретична механіка» і «Програмування та математичні пакети», що викладаються згідно навчальних планів студентам спеціальності 111 Математика Черкаського національного університету імені Б. Хмельницького.

Задача полягає в тому, щоб визначити, скільки води треба налити у склянку, що стоїть нахилено на ребрі, щоб її центр мас після зрівноваження зайняв найнижче положення. Для розв'язання задачі необхідно застосувати поняття центра мас і статичного моменту та методи оптимізації функції кількох змінних, що вводяться в курсі «Математичний аналіз: функції кількох змінних». При цьому студенти дізнаються, що поняття центра мас та статичного моменту є одними з базових понять теоретичної механіки, а задачу оптимізації, що виникає в процесі дослідження, не можна розв'язати аналітично, а тому потрібно застосувати чисельні методи оптимізації, наприклад, функцію `fmincon` пакету Matlab. Після проведеного дослідження студенти проводять дослід, у якому зрівноважують на монеті склянку з різною кількістю води, зокрема, з тою кількістю, яка була отримана в результаті теоретичного дослідження.

Після виконання дослідження в рамках проєкту студентам пропонуються для самостійного розв'язання модифікації описаної задачі про центр мас склянки, коли накладаються додаткові умови: 1) склянка наповнена декількома рідинами, які розміщуються шарами, що не змішуються (компонентний матеріал); 2) склянка має форму, відмінну від циліндричної.

У вступній частині описано задачу про баланс склянки та описано суть проєкту. У другому розділі наведено основні відомості про центр мас, статичний момент тіла, функції оптимізації пакету Matlab. Другий розділ містить розв'язання задачі про обчислення центра мас нахиленої склянки з водою для конкретних параметрів склянки. Це розв'язання допомагає викладачеві організувати роботу студентів над проєктом.

Список використаної літератури:

1. Бугасенко Г. О. Курс теоретичної механіки. – Київ: Вища школа, 1968. 367 с.
2. Буртик. URL: <https://uk.wikipedia.org/w/index.php?curid=699366> (дата звернення: 24.12.2023).
3. Проектне навчання: коротко про головне. URL: <https://nus.org.ua/view/proektne-navchannya-korotko-pro-golovne/> (дата звернення: 24.12.2023).
4. Центр інерції. URL: <https://uk.wikipedia.org/w/index.php?curid=83251> (дата звернення: 24.12.2023).
5. Шкіль М.І. Математичний аналіз: підручник: ч. 2. – 3-тє видання, переробл. та допов. – Київ: Вища школа, 2005. – 510 с.: іл.
6. Bar trick (balancing pint glass). URL: https://youtu.be/O7_9Vy1gvA (дата звернення: 24.12.2023).
7. `fmincon`. URL: https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html?s_tid=srchtitle_fmincon_1#b_usow0u-1_1 (дата звернення: 24.12.2023).

8. How to balance a beer glass of coin. URL: <https://www.dailymotion.com/video/x2cb29> (дата звернення: 24.12.2023).
9. Stewart J. Multivariable calculus: concepts and contexts. Brooks/Cole, 2001.
10. Welcome to MATLAB. URL: <https://matlab.mathworks.com/> (дата звернення: 24.12.2023).

References:

1. Buhaenko H.O. Kurs teoretychnoi mehaniky. – Kyiv: Vyshcha shkola, 1968. 367 s.
2. Burtyk. URL: <https://uk.wikipedia.org/w/index.php?curid=699366> (дата звернення: 24.12.2023).
3. Proektne navchannya: korotko pro holovne. URL: <https://nus.org.ua/view/proektne-navchannya-korotko-pro-golovne/> (дата звернення: 24.12.2023).
4. Tsentr inertsii. URL: <https://uk.wikipedia.org/w/index.php?curid=83251> (дата звернення: 24.12.2023).
5. Shkil' M.I. Matematychnyi analiz: pidruchnyk: ch. 2. – 3-te vydannya, pererob. ta dopov. Kyiv: Vyshcha shkola, 2005. – 510 с.: іл.
6. Bar trick (balancing pint glass). URL: https://youtu.be/O7_9Vy1gvA (дата звернення: 24.12.2023).
7. fmincon. URL: https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html?s_tid=srchtitle_fmincon_1#usow0u-1_1 (дата звернення: 24.12.2023).
8. How to balance a beer glass of coin. URL: <https://www.dailymotion.com/video/x2cb29> (дата звернення: 24.12.2023).
9. Stewart J. Multivariable calculus: concepts and contexts. Brooks/Cole, 2001.
10. Welcome to MATLAB. URL: <https://matlab.mathworks.com/> (дата звернення: 24.12.2023).

A. V. Honcharenko

Master's student, Bohdan Khmelnytsky National University Of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,
honcharenko.anna1619@vu.cdu.edu.ua

S. V. Babenko

Ph.D., senior lecturer, Bohdan Khmelnytsky National University Of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,
differenceeq@vu.cdu.edu.ua

“MASS CENTER CALCULATION OF A TILTED GLASS OF WATER” INTERDISCIPLINARY EDUCATIONAL PROJECT

In the paper the “Calculation of the center of mass of a tilted glass of water” interdisciplinary educational project is proposed. The project involves consolidating the concepts of a static moment and center mass of the body, methods for finding absolute extrema for a function of several real variables, by solving a research problem. The problem is to determine how much water should be poured into a glass that is tilted on its edge so that its center of mass takes the lowest position after balancing. Balance problems are quite common on the Internet: users upload videos in which they demonstrate their ability to maintain stable balance of various objects (glasses, cans, bottles, stones, etc.). A natural

question arises: how to achieve the balance of an object? The ability of an object to be in stable equilibrium is closely related to the position of its mass center. The position of the mass center of a glass of water depends on the level of the liquid in it as well as on the inclination of the glass. Within the framework of the project, this dependence is investigated by methods of mathematical analysis and numerical methods, which are implemented by tools from the Matlab programming and numeric computing platform. The paper provides a solution to the problem of the center of mass of a tilted glass with water, for specific values of the parameters of the glass. The solution aims to help the teacher organize the students' work on the project.

As part of the project, students are invited to: a) solve the problem of balancing a glass theoretically; b) conduct a study in which they try to balance a glass with a different amount of water on a coin, in particular, with the amount that was obtained as a result of a theoretical study; c) draw conclusions based on the results of the conducted experiment. An important feature of the project is that in the process of working on it, students are also familiar with the disciplines “Theoretical Mechanics” and “Programming and Mathematical Packages”, which are taught in accordance with the curriculum for students of the specialty 111 Mathematics at the Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy.

Keywords: center of mass, equilibrium, balance, glass, interdisciplinary educational project, Matlab.

Одержано редакцією 18.07.2023

Прийнято до друку 23.09.2023