

ORCID: 0000-0002-9540-773X

**В. А. ГАВРИШ**

керівник гуртка інформатики в позашкільному навчальному закладі «Центр дитячої та юнацької творчості м. Черкаси», м. Черкаси, Україна.  
Магістр фізики, Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, Черкаси, Україна, [yagavrish@ukr.net](mailto:yagavrish@ukr.net)

ORCID: : 0000-0002-3476-6747

**В. С. ДЕНИСЕНКО**

кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри моделювання економіки і бізнесу, Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, Черкаси, Україна, [denvikstab@vu.cdu.edu.ua](mailto:denvikstab@vu.cdu.edu.ua)

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-21-36

PACS: 05.45.-a, 05.45.Tr,  
05.45.Df, 05.10.-a, 05.45.Pq**ОЦІНКА КОРЕЛЯЦІЙНОЇ РОЗМІРНОСТІ АТРАКТОРІВ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ МАТРИЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ (СДМ - МЕТОД)**

*У роботі досліджено методи оцінювання кореляційної розмірності атракторів динамічних систем, що є інваріантною мірою неоднорідності фрактальної структури атракторів. На основі алгоритму Грасбергера–Прокачча було розроблено та протестовано метод обчислення кореляційної розмірності на основі матричних обчислень, що передбачає побудову матриці відстаней між точками атрактора у фазовому просторі. Алгоритм включає сортування цієї матриці та аналіз графіка логарифмічної залежності. Розроблені методи були застосовані до «еталонних» атракторів: логістичне відображення, відображення Енона, атрактори Каплана–Йорка, Заславського, системи Лоренца, Ресслера та Рабіновича–Фабриканта. Це дозволило підтвердити теоретичні аспекти експериментальними результатами. Завдяки застосуванню матричних обчислень вдалося досягти не лише підвищення швидкості виконання розрахунків, але й точності оцінок, оскільки метод враховує всі точки атрактора. Описані методи можуть бути застосовані до широкого класу задач фізичної та економічної динаміки.*

**Ключові слова:** кореляційна розмірність, атрактори, фазовий простір, динамічні моделі, матриця відстаней, метод Грасбергера–Прокачча, фрактальна структура, хаос.

**2. Вступ та постановка завдання**

Розглянемо динамічну систему, яка описується диференціальним рівнянням [1]:

$$\dot{x}_t = g(x_t), \quad (1)$$

де  $g: R^m \rightarrow R^m$ ,  $x_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(m)}) \in R^m$ . Отримані розв'язки рівняння (1) дозволяють побудувати фазову траєкторію динамічної системи. В цьому випадку, згідно класичних уявлень, така математична модель може передбачити еволюцію системи на достатньо великий проміжок часу. Однак, дослідження проведені в кінці минулого століття показали, що дуже часто така система демонструє хаотичну і непередбачувану поведінку. Як правило, до хаотичної поведінки призводить наявність в системі дисипація енергії чи зворотній зв'язок, але в окремих випадках хаос може виникати і в консервативних системах. За фазовою траєкторією можна побудувати

атрактор – множина в фазовому просторі динамічної системи, до якої прямують траєкторії системи після достатньо тривалого часу, незалежно від початкових умов. Дуже часто такі атрактори збігаються до обмеженої множини: однієї точки – такий атрактор називають точковим, або ж до замкнутої кривої – граничний цикл. У багатьох випадках еволюція динамічної системи асимптотично збігається до такого набору точок у фазовому просторі, який і називається атрактором. Для прикладу, розглянемо затухаючий гармонічний осцилятор, що описується рівнянням:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \vartheta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{2}$$

де  $\vartheta$  – параметр згасання, що визначається тертям, а  $\omega$  – циклічна частота осцилятора. Тоді атрактор можна задати двовимірним фазовим простором з набором  $x_t^{(1)} = x, x_t^{(2)} = dx/dt$ . В цьому випадку динаміка системи асимптотично наближається до точки  $x_t^{(1)} = 0, x_t^{(2)} = 0$ , яку можна вважати атрактором, що складається лише з однієї точки і тому має нульову розмірність. Ця точка є стійким атрактором, оскільки всі траєкторії в її околі збігаються до неї з часом.

Дуже часто, при певних параметрах, форма атрактора динамічної системи має вигляд фрактальної фігури. Такі атрактори називають дивними (strange attractor) і вони, як правило, виникають у випадку наявності в системі хаотичної динаміки. Наприклад, нелінійний осцилятор Ван дер Поля (Van der Pol, 1920) [2]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - \eta) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{3}$$

де  $\eta$  – константа, демонструє поведінку, характерну для систем зі зворотними зв'язками. Орбіта цієї системи у фазовому просторі може мати фрактальну структуру, що є ознакою режиму хаосу.

Поняття фрактальності включає дробову розмірність, що є характерною для просторової топології атракторів таких систем. Тобто, при визначенні фрактальних характеристик дивних атракторів розмірність Хаусдорфа-Безиковича (Hausdorff and Besicovitch) [3, 4] не є цілим числом. Існує кілька способів оцінки фрактальної розмірності, що відрізняються за методикою та початковими теоретичними уявленнями і, як правило, дають схожі оцінки цієї характеристики. Так, існують точкова, інформаційна та кореляційна розмірності, які можуть бути отримані безпосередньо з узагальненої ентропії Реньї [5]. Однак, в рамках цієї статті ми зосереджуємося виключно на дослідженні кореляційної розмірності.

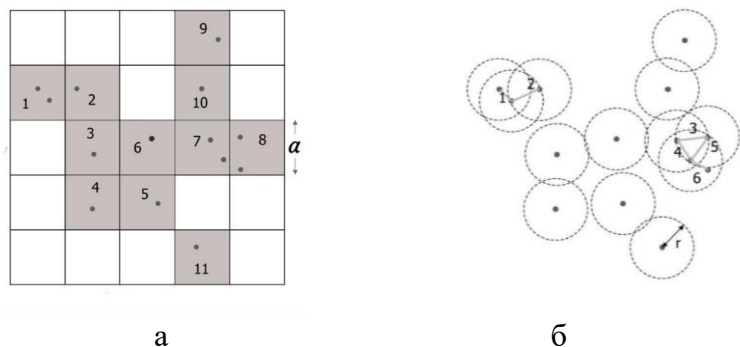


Рис. 1. Оцінка фрактальної розмірності атрактора: а – за допомогою бокс-методу, розбиття фазового простору на прямокутники; б – метод Грасбергера-Прокачча, використання рухомих сфер.

Fig. 1. Estimation of the fractal dimension of an attractor: (a) using the box-counting method, dividing the phase space into rectangles; (b) the Grassberger-Proccacia method, employing moving spheres.

Фрактальну розмірність можна оцінити за допомогою бокс-методу (box-counting method) [6]. Цей метод є одним із найпоширеніших підходів для визначення фрактальної розмірності атракторів та фрактальних об'єктів. У бокс-методі фазовий простір атрактора поділений сіткою прямокутників (боксів) з однаковими розмірами, як на рис. 1а. Необхідно знайти кількість боксів, що покривають усі точки атрактора. При зменшенні розміру боксів їх кількість зростає, щоб повністю покрити атрактор.

Залежність кількості прямокутників від розміру прямокутника для простору довільної розмірності можна записати, як

$$P(a) \sim a^{-d}, \quad (4)$$

де  $P(a)$  – кількість прямокутників необхідних для покриття атрактора,  $a$  – довжина ребра прямокутника. Співвідношення (4) впливає з тих міркувань, що при зменшенні довжини ребра  $a$ , кількість прямокутників, необхідних для покриття атрактора, збільшується пропорційно  $1/a^d$ , де  $d$  – фрактальна розмірність.

З формули (4) можна отримати оцінку фрактальної розмірності  $d$ , якщо прологарифмувати обидві частини та взяти границю:

$$d = -\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\log P(a)}{\log a}. \quad (5)$$

Обчислити значення  $d$  за формулою (5) можна, знайшовши кутовий коефіцієнт нахилу прямолінійної ділянки кривої залежності  $\log P(a)$  від  $\log a$ . Такі криві, як суцільна лінія будуть мати фрактальну розмірність рівну 1. Більш складі фігури, такі як атрактори, можуть мати розмірність більше 1. Як правило, це значення є дробовим і меншим розмірності простору в якому побудовано (вкладено) цей атрактор. Розмірність такого простору називають розмірністю вкладення (embedding dimension).

Хоча бокс-метод є досить простим та інтуїтивно зрозумілим, він не є достатньо ефективним, особливо для складних фрактальних структур та великих наборів даних. Принципово іншим підходом є метод Грасбергера-Прокачча (P. Grassberger and I. Procaccia) [7], що дає змогу визначити фрактальну розмірність на основі кореляційної функції за формулою:

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \theta(r - \|Y_i - Y_j\|), \quad (6)$$

де  $N$  – кількість точок атрактора,  $Y_i$  та  $Y_j$  – вектори, дві точки атрактора у фазовому просторі,  $\theta$  – функція Гевісайда,  $\|*\|$  – евклідова норма,  $r$  – радіус рухомої сфери.

Фрактальну розмірність, що знаходять на основі формули (6) називають кореляційною розмірністю. Цей метод ще називають методом рухомих сфер. Для цього, для заданого радіуса рухомої сфери (рис. 1б) обчислюють кількість усіх пар точок, що знаходяться в межах радіуса цієї сфери та ділять на кількість усіх можливих пар точок. Потім, радіус збільшується і обчислення повторюються для нового радіуса. Кореляційна функція (6) описує ймовірність того, що дві точки фазового простору знаходяться на відстані  $r$  одна від одної. З формули (6) виникає необхідність обчислювати відстані між точками атрактора «кожна з кожною», знаходити кількість пар, що потрапили в межі рухомої сфери та ділити на кількість усіх можливих пар точок, щоб отримати ймовірність. Такий підхід містить значну кількість обчислень, що вимагає застосування вкладених циклів. Крім того, передбачається багаторазове обчислення за формулою (6) для різних значень радіуса, що збільшується на фіксований крок.

Кореляційну розмірність у випадку (6) знаходять за формулою:

$$D_c = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log C(r)}{\log r} \quad (7)$$

Щоб знайти кореляційну розмірність за формулою (7) будують графік залежності  $C(r)$  від радіуса  $r$  рухомої сфери в подвійній логарифмічній шкалі та знаходять кутовий коефіцієнт нахилу кривої на прямолінійній ділянці графіка. Величина нахилу графіка вказує на те, наскільки швидко збільшується кількість точок із збільшенням радіусу рухомих сфер, (рис. 1б). Для різних динамічних систем ця величина може відрізнятись і є її інваріантною характеристикою, яка залежить як від кількості рівнянь, що описують систему, так і від міри неоднорідності фрактальної структури атрактора. На основі аналізу кореляційної розмірності оцінюють характер динаміки системи – хаотичність, циклічність. Кореляційна розмірність застосовується для вивчення як фізичних систем, так і економічних процесів, біологічних систем, в багатьох інших областях, де важливу роль відіграє складність системи.

Метод знаходження кореляційної розмірності досліджували Грасбергер та Прокачча (Grassberger P., Procaccia I.) У статті [7] автори представили основи методу кореляційної розмірності (також відомий як G–P метод) для кількісного аналізу дивних атракторів. Робота включає математичне обґрунтування методу та його застосування до аналізу нелінійних динамічних систем. Основний акцент зроблено на визначенні зв'язку між кореляційною розмірністю та геометричними властивостями атракторів. Метод став основою для подальших досліджень у сфері хаотичних систем.

Робота [8] Мальрезона та ін. (Malraison V., Atten P., Bergé P., Dubois M.) присвячена дослідженню експериментальної оцінки кореляційної розмірності для двох конвективних систем у режимі хаосу. Автори застосували метод Грасбергера-Прокачча до реальних фізичних систем, що демонструють турбулентні структури. Результати підтвердили теоретичні припущення про хаотичну природу даних систем. Суїнні (Swinney H. L.) [9] зробив огляд досліджень складної динаміки та хаосу у різних фізичних системах. Основна увага приділялася експериментальним спостереженням нелінійних явищ, таких як переходи до турбулентності та хаотична поведінка. Автор також описав застосування методу кореляційної розмірності для класифікації складних динамічних режимів. У статті [10] Чіліберто і Голлуб (Ciliberto S., Gollub J. P.) проаналізували хаотичну поведінку мод у системах з параметричним збуренням хвиль на поверхні рідини. Автори вивчали нелінійний вплив взаємодії різних мод хвиль на їх динаміку. Кореляційна розмірність використовувалася для аналізу складності атракторів, які виникають у цих системах. Робота значно розширила розуміння нелінійних явищ у гідродинаміці.

У роботі [11] Мун і Лі (Moon F. S., Li G. X.) досліджували фрактальну структуру атрактора, що виникає в системах з подвійним потенціалом. Вони застосували метод кореляційної розмірності для аналізу хаотичної поведінки механічних систем, що коливаються між двома стабільними станами. Робота акцентує увагу на зв'язку між геометричними властивостями атрактора та фізичною поведінкою системи.

Aderemi, F. L., & Oladele, B. O. [12] описали застосування алгоритму Грасбергера і Прокачча для оцінки кореляційної розмірності на основі сейсмічних даних. Автори досліджували динамічні особливості землетрусів, використовуючи цей алгоритм для аналізу нелінійних сигналів, що дозволяє визначати хаотичність у процесах. Вони підкреслюють важливість кореляційної розмірності, як індикатора складності сейсмічних даних.

В статті [13] Lee, M. досліджує фрактальний аналіз простору токенів GPT-2, включаючи оцінку кореляційної розмірності для виявлення стабільності та еволюції цих просторів. Робота зосереджується на математичних аспектах представлення даних в моделі GPT-2 і розглядає вплив різних модифікацій моделі на її динамічні

характеристики. У статті [14] Benmizrachi, A., Procaccia, I., & Grassberger, P. розглядають відображення Бейкера, як приклад нелінійної динамічної системи, аналізуючи її хаотичні властивості. Автори використовують кореляційну розмірність для оцінки складності та нелінійності системи, підкреслюючи її застосовність до математичного моделювання хаотичних процесів. Krakovská, A., & Chvosteková, M. [15] запропонували простий метод оцінки кореляційної розмірності та його використання для виявлення причинно-наслідкових зв'язків у динамічних системах. Автори розглядають ефективність методу в реальних і симуляційних даних, демонструючи його придатність для аналізу взаємозв'язків у нелінійних системах.

Таким чином, методи оцінки кореляційної розмірності відіграють важливу роль в дослідженні характеристик різноманітних динамічних систем.

У цій роботі ми пропонуємо модифікований метод оцінки кореляційної розмірності — CDM (Correlation Dimension Matrix) метод, що полягає у використанні матриць, які замінюють громіздкі обчислення за формулами поданими в [7] і це прискорює обчислення та забезпечує більшу точність.

**Метою цієї роботи** є розробка ефективних методів аналізу фрактальних характеристик атракторів динамічних систем шляхом застосування матричних обчислень до знаходження кореляційної розмірності.

Запропонована методика розширює можливості аналізу багатовимірних динамічних систем і сприяє розвитку методів оцінки фрактальних характеристик у наукових дослідженнях.

### 3. Опис досліджуваних динамічних систем

Щоб перевірити ефективність алгоритму було розглянуто такі відомі «еталонні» динамічні системи:

1. **Логістичне відображення** (logistic map)[1; 6; 7], яке здатне демонструвати як регулярну, так і складну хаотичну поведінку в залежності від значення його параметра, можна виразити такою рекурсивною формулою:

$$X_{n+1} = \mu X_n (1 - X_n), \quad (8)$$

де  $X_{n+1}$  та  $X_n$  – наступне та попереднє значення послідовності,  $\mu$  – параметр відображення, який визначає стан системи. Систему було досліджено в точці близькій до стану хаосу  $\mu = 3,5699456$  (рис. 2а).

2. **Відображення Ено** (Henon map) [1; 7; 16]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n; \\ y_{n+1} &= bx_n. \end{aligned} \quad (9)$$

Ця математична модель часто використовується для вивчення динамічних характеристик і хаосу в системах. Рівняння було запропоноване Майклом Ено (Michel Hénon) в 1976 році, як модель простої нелінійної динамічної системи. В цьому відображенні кожна точка площини  $(x_n, y_n)$  відображається в точку  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  відповідно до (9). В залежності від параметрів  $a$  та  $b$  система може перебувати в різних станах. Для класичних значень  $a = 1,4$  та  $b = 0,3$  – відображення демонструє хаотичну поведінку (рис. 2б).

3. **Відображення Каплана-Йорка** (Kaplan–Yorke) [7; 17] є однією з найважливіших моделей в теорії хаотичних систем. Ця система є прикладом дискретного відображення, яке описує хаотичну динаміку. Вона була вперше вивчена та описана Дж. Капланом та М. Йорком, американськими фізиками в 1979 році. Відображення Каплана-Йорка описують рекурентним рівнянням:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n \pmod{1} \\ y_{n+1} &= ay_n + \cos(4\pi x_n), \end{aligned} \quad (10)$$

де  $\alpha$  – параметр системи,  $mod$  – оператор модуля. Системи задані рівнянням (10) виявляють хаотичну динаміку, демонструють чутливість до початкових умов і є непередбачуваними (рис. 2в).

4. **Відображення Заславського** (Zaslavskii Map) [18] – математична модель, запропонована Джорджем М. Заславським, була згодом досліджена Расселом, Хансоном і Оттом [15], а також Грасбергером і Прокаччею [7]. В цій дискретній динамічній моделі кожній точці на площині ставиться у відповідність інша точка за формулами:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= [x_n + v(1 + \mu y_n) + \epsilon v \mu \cos(2\pi x_n)](mod\ 1); \\ y_{n+1} &= e^{-r}(y_n + \epsilon \cos(2\pi x_n)), \end{aligned} \quad (11)$$

де  $\mu = \frac{1-e^{-r}}{r}$ ,  $v$ ,  $\mu$ ,  $\epsilon$  і  $r$  – параметри від яких залежить динаміка системи,  $mod$  – оператор модуля з дійсним аргументом. У дослідженні було вибрано такі параметри:  $r = 3$ ,  $\epsilon = 0,3$ ,  $v = 400/3$ . Ця динамічна система при виборі певних параметрів може демонструвати хаотичну поведінку, що означає чутливість до початкових умов: навіть невеликі зміни можуть призвести до значних відмінностей у подальшому розвитку системи (рис. 2г).

5. **Система Лоренца** описує поведінку повітряних потоків чи рідин під впливом градієнта температур та при наявності сили тяжіння, може бути задана системою диференціальних рівнянь [7; 19]:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sigma(y - x); \quad \frac{\partial y}{\partial t} = x(\rho - z) - y; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = xy - \beta, \quad (12)$$

де  $\sigma$  – безрозмірне співвідношення коефіцієнтів в'язкості та теплопровідності (число Прандтля),  $\rho$  – безрозмірний градієнт температури, що пов'язаний з числом Релея,  $\beta$  – геометричний множник. Для параметрів  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  та  $\beta = 8/3$  система проявляє чутливість до початкових умов та демонструє хаотичну поведінку (рис. 2д).

6. **Атрактор Реслера** (Rössler attractor) був вперше досліджений німецьким фізиком і хіміком Отто Реслером в 1976 році [20]. Траєкторія задається системою трьох диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z; \quad \frac{dy}{dt} = x + a \cdot y; \quad \frac{dz}{dt} = b + z \cdot (x - c). \quad (13)$$

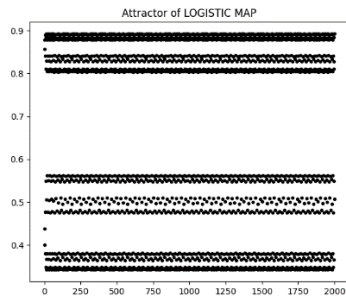
Ці рівняння описують стан системи в тривимірному фазовому просторі. При значеннях параметрів  $a = b = 0,2$  і  $2,6 \leq c \leq 4,2$  атрактор має стійкі граничні цикли. При  $c > 4,2$  виникає хаотичний атрактор, чітко визначені лінії граничних циклів розпливаються і заповнюють фазовий простір нескінченною кількістю траєкторій, що мають властивості фрактала. Атрактор Реслера включає лінійні і нелінійні члени, які генерують хаос (рис. 2е).

7. **Система Рабіновича-Фабриканта** була запропонована в 1979 році М.І. Рабіновичем та А.Л. Фабрикантом [7; 21], що досліджували поведінку нелінійної динамічної системи в нерівноважній дисипативній структурі. Вони записали відоме рівняння Ландау для цієї моделі, як узагальнене комплексне параболічне рішення, що у спрощеному вигляді було зведено до системи трьох рівнянь:

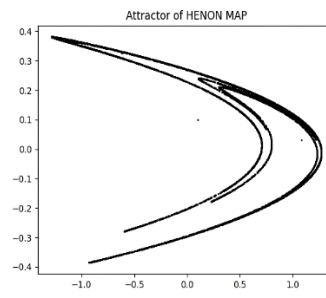
$$\frac{dx}{dt} = y(z - 1 + x^2) + \gamma x; \quad \frac{dy}{dt} = x(3z + 1 - x^2) + \gamma y; \quad \frac{dz}{dt} = -2z(v + xy), \quad (14)$$

де  $\gamma$  і  $v$  – параметри системи, що мають смисл коефіцієнтів дисипації. Систему було досліджено в хаотичному режимі для  $\gamma = 0,87$  та  $v = 1,1$  (рис. 2є).

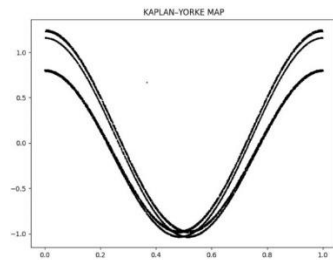
Візуалізацію усіх досліджуваних атракторів подано на рис. 2а – е. В усіх випадках бачимо, що атрактори мають складну фрактальну структуру та демонструють інваріантність при збільшенні масштабу. Атрактори рис. 2а – г були отримані безпосередньо застосовуючи відповідні рекурентні формули. Для побудови тривимірних атракторів рис. 2д – е було застосовано адаптивний метод Рунге-Кути 4-го та 5-го порядків [22]. Вигляд атракторів відповідає поданим у джерелах [1; 7; 16-21].



а



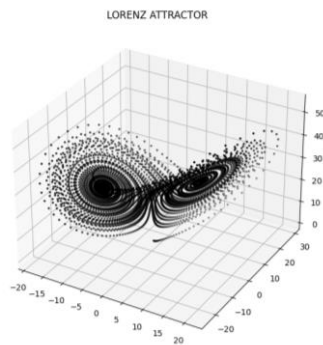
б



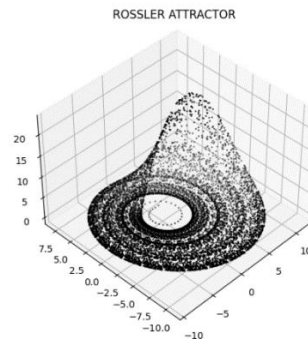
в



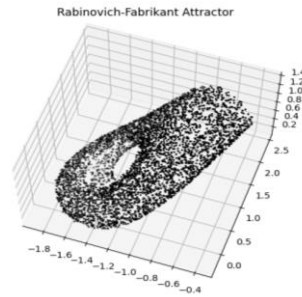
г



д



е



є

Рис. 2. Візуалізація атракторів динамічних систем: а – логістичне відображення при  $\mu = 3,5699456$ ; б – відображення Ено; в – відображення Каплана-Йорка; г – відображення Заславського; д – система Лоренца; е – система Ресслера; є – система Рабіновича-Фабриканта

Fig. 2. Visualization of attractors in dynamic systems: a – logistic map for  $\mu = 3,5699456$ ; b – Henon map; c – Kaplan–Yorke map; d – Zaslavsky map; e – Lorenz system; f – Rössler system; g – Rabinovich–Fabrikant system

#### 4. Оцінка кореляційної розмірності із застосуванням матричних обчислень

Щоб оцінити кореляційну розмірність за формулами (6) і (7) необхідно здійснити велику кількість обчислень. Більш ефективним способом, який ми пропонуємо, є побудова матриці відстаней з подальшим її сортуванням. Цей метод є більш доцільним з точки зору оптимізації та включає всі точки атрактора без втрати даних. Метод має кілька важливих етапів, на кожному з яких було отримано важливі кількісні та якісні характеристики.

##### 3.1. Побудова матриці відстаней $D_s$

Матриця відстаней  $D_s$  містить усі попарні евклідові відстані між точками атрактора. Якщо  $Y_n = \{Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$  – ряд векторів, що позначають точки атрактора у багатовимірному фазовому просторі, то спочатку будуюмо матрицю  $M_s$  кожен рядок якої є повторенням ряду  $Y_n$ :

$$M_s = \begin{pmatrix} Y_0 & Y_1 & \dots & Y_{n-1} \\ Y_0 & Y_1 & \dots & Y_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_0 & Y_1 & \dots & Y_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Тоді, матрицю відстаней можна знайти, як різницю матриць  $M_s$  та  $M_s^T$  – транспонованої матриці з подальшим знаходженням евклідової норми:

$$D_s = \|M_s - M_s^T\|, \quad (16)$$

де норма береться по кожному окремому елементу матриці.

Тоді, отримаємо шукану діагонально симетричну квадратну матрицю  $D_s$  у якій кожен елемент  $D_s(i, j)$  є відстанню між точками  $Y_i$  та  $Y_j$  атрактора:

$$D_s(i, j) = \|M_s(i, j) - M_s^T(i, j)\| = \|Y(i) - Y(j)\|. \quad (17)$$

Матриця має нульові елементи вздовж головної діагоналі. Така матриця відстаней є проекцією точок атрактора  $m$ -вимірного фазового простору на двовимірну площину.

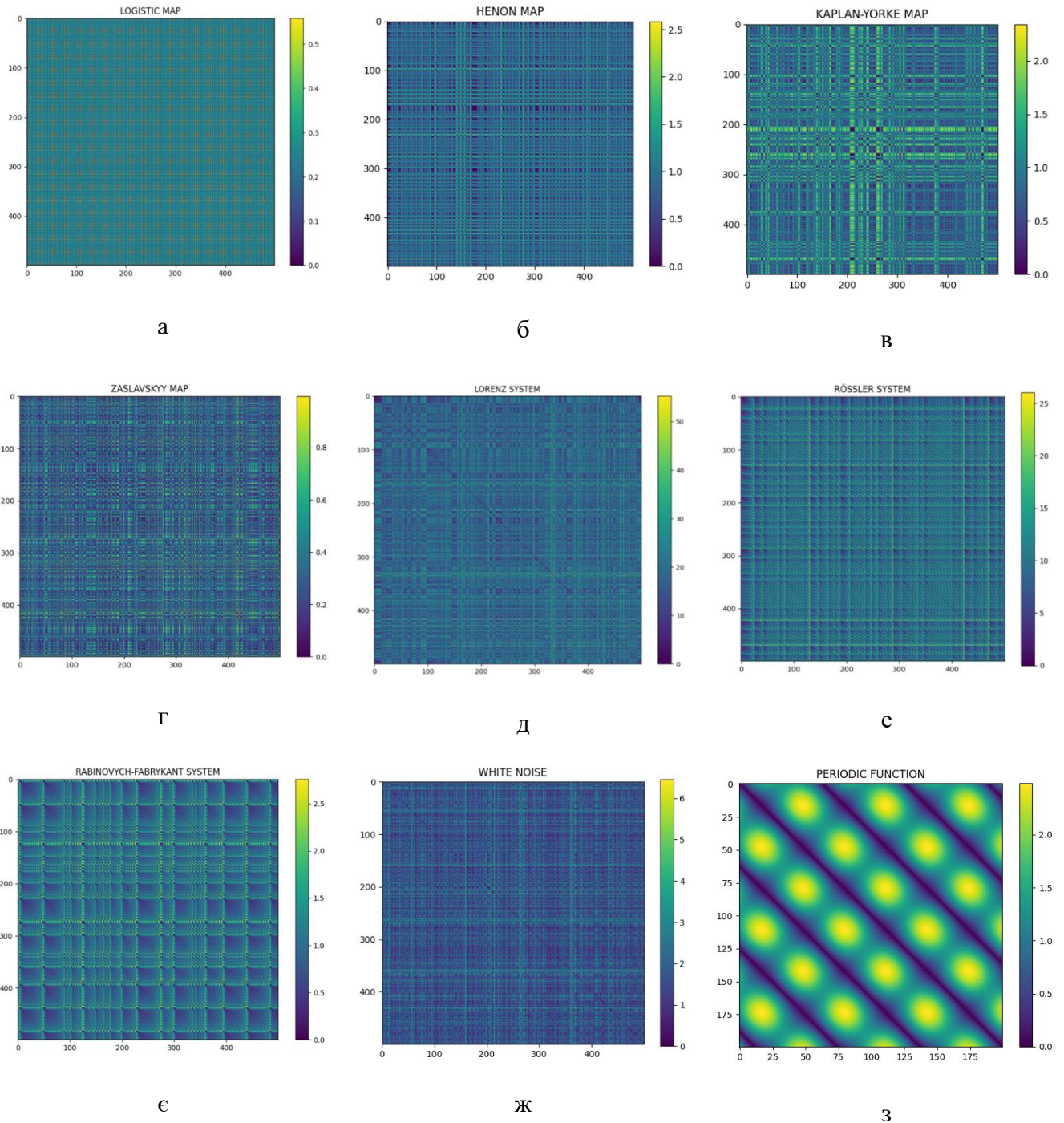


Рис. 3. Діаграми матриць відстаней: а – логістичне відображення; б – відображення Ено; в – відображення Каплана-Йорка; г – відображення Заславського; д – система Лоренца; е – система Реслера; є – система Рабіновича-Фабриканта; ж – білий шум; з – синусоїда

Fig. 3. Distance matrix diagrams: a – logistic map; b – Henon map; c – Kaplan–Yorke map; d – Zaslavsky map; e – Lorenz system; f – Rössler system; g – Rabinovich–Fabrikant system; h – white noise; i – sinusoid.

Діаграми матриць відстаней досліджуваних систем представлено на рис. 3а – є. Для всіх досліджуваних атракторів діаграми мають характерні структурні особливості –

чергування світлих і темних смуг, що утворюють прямокутні області. У випадку гаусового білого шуму діаграма має суцільну «шумову» структуру, як на рис. 3ж, для періодичної функції характерна чітка періодична структура – рис. 5з.

З рисунків 3а – з слідує, що за типом діаграми можна візуально визначити тип атратора та про процес який його породжує. У випадку діаграм досліджуваних хаотичних атраторів, маємо проміжний випадок між строгою періодичністю та шумом.

У випадку хаотичних процесів спостерігаємо характерну текстуру на діаграмах, що є наслідком наявності тонкої фрактальної структури. Такі діаграми дають змогу виявити структурний порядок у хаотичних системах. Але, більш точно виявити такі особливості дає змогу подальший кількісний аналіз.

### 3.2. Сортування матриць відстаней та знаходження кореляційної розмірності

Після сортування матриці  $D_s$  отримаємо такий ряд відстаней, кожна точка якого є відстанню на якій знаходиться кожна наступна пара точок із збільшенням радіуса рухомих сфер (формула (6)), що з'являється на цій відстані. Вилучивши перші нулі та всі парні елементи, щоб уникнути повторів отримаємо ряд:

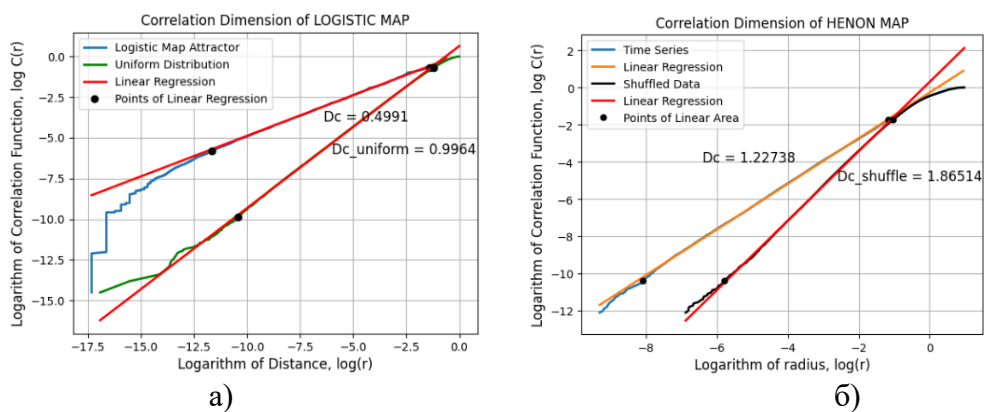
$$X_s = \{x_i \in \text{sort}(D_s): x_i \neq 0, i \bmod 2 \neq 0\}, i = 1, 2, \dots, n^2. \quad (18)$$

Щоб отримати кореляційну функцію, як у формулі (6) необхідно поставити кожному значенню ряду відстаней  $X_s$  ймовірність знаходження пари точок на цій відстані. Якщо ряд  $X_s$  має довжину  $K$ , то кожному значенню ряду  $X_s$  буде відповідати значення ряду  $Y_s$ :

$$Y_s = \left\{ \frac{1}{K} \cdot i \right\}, i = 1, 2, \dots, K, \quad (19)$$

де  $K = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1)$ ,  $n$  – кількість точок атратора фазового простору  $Y_n$ . Кожне значення ряду  $Y_s$  є ймовірністю знаходження двох довільних дочок фазового простору на відстані із ряду  $X_s$ . Побудувавши залежність  $Y_s$  від  $X_s$  в подвійній логарифмічній шкалі, отримаємо графіки залежностей досліджуваних атраторів.

На рис. 4 а-є представлено графіки оцінки кореляційної розмірності за нахилом у подвійній логарифмічній шкалі для різних динамічних систем.



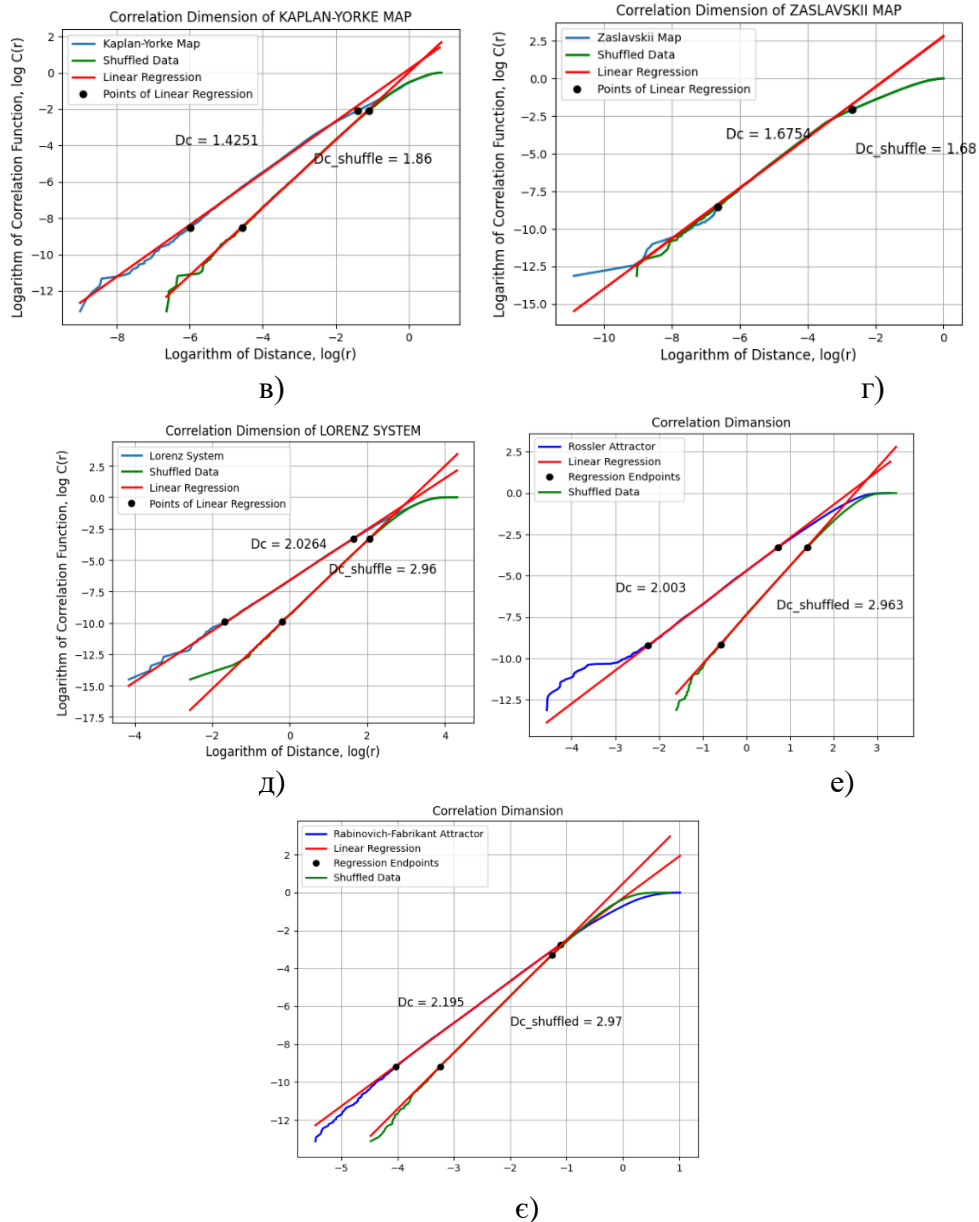


Рис. 4. Оцінка кореляційної розмірності за кутом нахилу в подвійній логарифмічній шкалі: а – логістичне відображення; б – відображення Ено; в – відображення Каплана-Йорка; г – відображення Заславського; д – система Лоренца; е – система Реслера; є – система Рабіновича-Фабриканта

Fig. 4. Estimation of the correlation dimension based on the slope in double logarithmic scale: a – logistic map; b – Henon map; c – Kaplan–Yorke map; d – Zaslavsky map; e – Lorenz system; f – Rössler system; g – Rabinovich–Fabrikant system.

Аналіз отриманих графіків підтверджує можливість чіткого визначення прямолінійної ділянки, що дозволяє оцінити кут нахилу. Цей кут є кореляційною розмірністю  $D_c$  атракторів досліджуваних систем. На рис. 4 а–є спостерігається суттєва відмінність між нахилами для вихідних часових рядів та перемішаних даних. Це свідчить про руйнування фрактальної структури атрактора під час перемішування, що призводить до рівномірного заповнення фазового простору і зростання кореляційної розмірності до максимально можливої – розмірності фазового простору.

Для логістичного відображення оцінкою кореляційної розмірності є  $D_c = 0,4991$ , що близьке до тестової оцінки з роботи [7] –  $D_c = 0,5 \pm 0,01$ . Для відображення Ено

кореляційна розмірність становить  $D_c = 1,198$ , що також узгоджується з результатом, отриманим у роботі [7] -  $D_c = 1,21 \pm 0,01$ . Відображення Каплана-Йорка має кореляційну розмірність  $D_c = 1,4251$ , що свідчить про дробову розмірність цього атрактора, характерну для хаотичних систем.

В роботі [7] було подано усереднену розмірність атрактора Заславського, як  $D_c \sim 1,5$ , що говорить про дробову розмірність цього атрактора. На рис. 4г кореляційну розмірність було оцінено, як  $D_c \sim 1,67$ . Однак, остаточного висновку про фіксоване значення цього параметра зробити не можна, він може лежати в певному діапазоні значень в залежності від випадкових флуктуацій, про цю проблему згадують автори в роботі [7].

Система Лоренца має оцінку кореляційної розмірності  $D_c = 2,0264$ , яка близька до результатів роботи [7] -  $D_c = 2,05 \pm 0,01$ . Для системи Ресслера кореляційна розмірність дорівнює  $D_c = 2,003$ , що підтверджує правильність застосованого алгоритму та відповідність теоретичним очікуванням. Нарешті, для системи Рабіновича-Фабриканта кореляційна розмірність становить  $D_c = 2,1954$ , що також співпадає з оцінками, наведеними в роботі [7] -  $D_c = 2,19 \pm 0,01$ .

Для всіх атракторів перемішування даних суттєво змінює їхню кореляційну розмірність. З графіків на рис. 4 а-є видно, що після перемішування фрактальна структура атрактора руйнується, і точки заповнюють фазовий простір рівномірно. Це призводить до зростання кореляційної розмірності, яка наближається до розмірності фазового простору.

Наприклад, для системи Лоренца після перемішування даних кореляційна розмірність наближається до розмірності вкладень  $m = 3$  і становить  $D_{c\_shuffled} \approx 2,96$ . Аналогічно для системи Рабіновича-Фабриканта значення кореляційної розмірності перемішаних даних дорівнює  $D_{c\_shuffled} \approx 2,97$ , що близьке до розмірності фазового простору цих атракторів.

Отримані значення кореляційної розмірності демонструють узгодженість результатів між різними методами та підтверджують ефективність запропонованого підходу. Усі значення знаходяться в межах, характерних для хаотичних атракторів досліджуваних систем.

## 5. Висновки

Метод оцінювання кореляційної розмірності атракторів динамічних систем, представлений у цій роботі, є вдосконаленою модифікацією алгоритму Грасбергера-Прокачча [7], яка вирізняється ефективністю з погляду обчислювальних ресурсів та точності. Застосування цього методу передбачає побудову матриці відстаней, її сортування та побудову логарифмічної залежності кореляційної функції від відстані у подвійній логарифмічній шкалі. Для точної оцінки кута нахилу, а також для моделювання потоків, заданих системою диференціальних рівнянь, було використано методи інтерполяції Рунге-Кути [22].

Матричний метод оцінки кореляційної розмірності демонструє високу ефективність і може забезпечити репрезентативні результати навіть для невеликих вибірок обсягом від 1000 до 5000 точок. Це суттєво знижує вимоги до обчислювальних ресурсів порівняно з роботою [7], де оцінювання проводилося на основі вибірок із 15 000 значень. Завдяки застосуванню матричних обчислень вдалося досягти не лише підвищення швидкості виконання розрахунків, але й точності оцінок, оскільки метод враховує всі точки атрактора.

Результати дослідження показали, що тривимірні атрактори Лоренца, Ресслера та Рабіновича-Фабриканта мають кореляційну розмірність у межах  $2 < D_c < 3$ , що відповідає теоретичним прогнозам і збігається з попередніми оцінками. При цьому

кореляційна розмірність для перемішаних даних значно більша і наближається до розмірності фазового простору, що свідчить про руйнування тонкої фрактальної структури атрактора.

Побудова матриць відстаней, їх сортування та виключення циклів із процесу побудови логарифмічної залежності, значно спрощує обчислення та дозволяє підвищити швидкість аналізу. Використання матричних обчислень забезпечує швидкий та точний підхід до оцінки кореляційної розмірності атракторів динамічних систем, що робить його зручним інструментом для аналізу фрактальних властивостей складних динамічних систем.

### Список використаної літератури:

1. Moon, F. C. Chaotic vibrations: an introduction for applied scientists and engineers // Research supported by NSF. — 1987.
2. Van der Pol, B. Theory of the amplitude of free and forced triode vibrations // Radio review. — 1920. — Т. 1. — С. 701-710.
3. Hausdorff, F. Dimension und äußeres Maß // Mathematische Annalen. — 1918. — Т. 79, № 1. — С. 157-179.
4. Besicovitch, A. S. On linear sets of points of fractional dimension // Mathematische Annalen. — 1929. — Т. 101, № 1. — С. 161-193.
5. Rényi, A. On measures of entropy and information // Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, volume 1: contributions to the theory of statistics. — University of California Press, 1961. — Т. 4. — С. 547-562.
6. Falconer, K. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. — John Wiley & Sons, 2004.
7. Grassberger, P., Procaccia, I. Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D: nonlinear phenomena. — 1983. — Т. 9, № 1-2. — С. 189-208. Режим доступу: [https://doi.com/10.1016/0167-2789\(83\)90298-1](https://doi.com/10.1016/0167-2789(83)90298-1)
8. Malraison, B., Atten, P., Berge, P., Dubois, M. Dimension of strange attractors: an experimental determination for the chaotic regime of two convective systems // Journal de Physique lettres. — 1983. — Т. 44, № 22. — С. 897-902. Режим доступу: <https://doi.com/10.1051/jphyslet:019830044022089700>
9. Swinney, H. L. Observations of complex dynamics and chaos // Fundamental problems in statistical mechanics VI. — 1985. — С. 253-289.
10. Ciliberto, S., Gollub, J. P. Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves // Journal of Fluid Mechanics. — 1985. — Т. 158. — С. 381-398. Режим доступу: <https://doi.com/10.1017/S0022112085002701>
11. Moon, F. C., Li, G. X. The fractal dimension of the two-well potential strange attractor // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1985. — Т. 17, № 1. — С. 99-108. Режим доступу: [https://doi.com/10.1016/0167-2789\(85\)90137-X](https://doi.com/10.1016/0167-2789(85)90137-X)
12. Aderemi, F. L., Oladele, B. O. Estimation of correlation dimension from earthquake data using grassberger and procaccia algorithm // Austr. J. Sci. Technol. — 2021. — Т. 5, № 3. — С. 621-625.
13. Lee, M. Fractal Analysis of GPT-2 Token Embedding Spaces: Stability and Evolution of Correlation Dimension // Fractal and Fractional. — 2024. — Т. 8, № 10. — С. 603. Режим доступу: <https://doi.org/10.3390/fractalfract8100603>
14. Benmizrachi, A., Procaccia, I., Grassberger, P. Baker's Map // Chaos. — 2021.

15. Krakovská, A., Chvosteková, M. Simple correlation dimension estimator and its use to detect causality // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2023. — Т. 175. — С. 113975. Режим доступу: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113975>
16. Henon, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Communications in Mathematical Physics*. — 1976. — Т. 50. — С. 376-392. Режим доступу: [https://doi.com/10.1007/978-0-387-21830-4\\_8](https://doi.com/10.1007/978-0-387-21830-4_8)
17. Kaplan, J. L., Yorke, J. A. Functional differential equations and approximation of fixed points // *Lecture notes in mathematics*. — 1979. — Т. 730. — С. 204-227.
18. Zaslavsky, G. M. The simplest case of a strange attractor // *Physics Letters A*. — 1978. — Т. 69, № 3. — С. 145-147. Режим доступу: [https://doi.com/10.1016/0375-9601\(78\)90195-0](https://doi.com/10.1016/0375-9601(78)90195-0)
19. Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow // *Journal of atmospheric sciences*. — 1963. — Т. 20, № 2. — С. 130-141. Режим доступу: [https://doi.com/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.com/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
20. Rössler, O. E. An equation for continuous chaos // *Physics Letters A*. — 1976. — Т. 57, № 5. — С. 397-398. Режим доступу: [https://doi.com/10.1016/0375-9601\(76\)90101-8](https://doi.com/10.1016/0375-9601(76)90101-8)
21. Rabinovich, M. I., Fabrikant, A. L. Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media // *J. Exp. Theor. Phys*. — 1979. — Т. 77. — С. 617-629.
22. Butcher, J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. — John Wiley & Sons, 2016.

#### References:

1. Moon, F. C. (1987). *Chaotic vibrations: an introduction for applied scientists and engineers*. Research supported by NSF.
2. Van der Pol, B. (1920). Theory of the amplitude of frfeE. forced triode vibrations. *Radio review*, 1, 701-710.
3. Hausdorff, F. (1918). Dimension und äußeres Maß. *Mathematische Annalen*, 79(1), 157-179.
4. Besicovitch, A. S. (1929). On linear sets of points of fractional dimension. *Mathematische Annalen*, 101(1), 161-193.
5. Rényi, A. (1961, January). On measures of entropy and information. In *Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, volume 1: contributions to the theory of statistics (Vol. 4, pp. 547-562). University of California Press.
6. Falconer, K. (2004). *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons.
7. Grassberger, P., & Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D: nonlinear phenomena*, 9(1-2), 189-208. Retrieved from [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(83\)90298-1](https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90298-1)
8. Malraison, B., Atten, P., Berge, P., & Dubois, M. (1983). Dimension of strange attractors: an experimental determination for the chaotic regime of two convective systems. *Journal de Physique lettres*, 44(22), 897-902. Retrieved from <https://doi.org/10.1051/jphyslet:019830044022089700>
9. Swinney, H. L. (1985). Observations of complex dynamics and chaos. *Fundamental problems in statistical mechanics VI*, 253-289.
10. Ciliberto, S., & Gollub, J. P. (1985). Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 158, 381-398. Retrieved from <https://doi.org/10.1017/S0022112085002701>

11. Moon, F. C., & Li, G. X. (1985). The fractal dimension of the two-well potential strange attractor. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 17(1), 99-108. Retrieved from [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90137-X](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90137-X)
12. Aderemi, F. L., & Oladele, B. O. (2021). Estimation of correlation dimension from earthquake data using grassberger and procaccia algorithm. *Austr. J. Sci. Technol.*, 5(3), 621-625.
13. Lee, M. (2024). Fractal Analysis of GPT-2 Token Embedding Spaces: Stability and Evolution of Correlation Dimension. *Fractal and Fractional*, 8(10), 603. Retrieved from <https://doi.org/10.3390/fractalfract8100603>
14. Benmizrachi, A., Procaccia, I., & Grassberger, P. (2021). Baker, s Map.
15. Krakovská, A., & Chvosteková, M. (2023). Simple correlation dimension estimator and its use to detect causality. *Chaos, Solitons & Fractals*, 175, 113975. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113975>
16. Henon, M. (1976). A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50, 376-392. Retrieved from [https://doi.org/10.1007/978-0-387-21830-4\\_8](https://doi.org/10.1007/978-0-387-21830-4_8)
17. Kaplan, J. L., & Yorke, J. A. (1979). Functional differential equations and approximation of fixed points. *Lecture notes in mathematics*, 730, 204-227.
18. Zaslavsky, G. M. (1978). The simplest case of a strange attractor. *Physics Letters A*, 69(3), 145-147. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(78\)90195-0](https://doi.org/10.1016/0375-9601(78)90195-0)
19. Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2), 130-141. Retrieved from [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
20. Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5), 397-398. Retrieved from [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(76\)90101-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(76)90101-8)
21. Rabinovich, M. I., & Fabrikant, A. L. (1979). Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media. *J. Exp. Theor. Phys*, 77, 617-629.
22. Butcher, J. C. (2016). *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley & Sons.

V. A. HAVRYSH

the head of the computer science group at the after-school educational institution  
"Centre of Children's and Youth Creativity of Cherkasy".

Master of physics, The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy,  
Cherkasy, Ukraine  
vagavrish@ukr.net

V. S. DENYSENKO

candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of economics and  
business modeling department,

The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine  
[denvikstab@vu.cdu.edu.ua](mailto:denvikstab@vu.cdu.edu.ua)

**ESTIMATION OF THE CORRELATION DIMENSION OF DYNAMICAL  
SYSTEM ATTRACTORS BASED ON MATRIX COMPUTATIONS (CDM -  
METHOD)**

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-21-36

PACS: 05.45.-a, 05.45.Tp,  
05.45.Df, 05.10.-a, 05.45.Pq

The methods for estimating the correlation dimension of attractors of dynamical systems, an invariant measure of the heterogeneity of the fractal structure of attractors, have been studied.

The aim of the article is to develop effective methods for estimating the correlation dimension of attractors in dynamical systems and to apply them to a range of models, enabling a comparison of the obtained results with theoretical and experimental findings.

Based on the Grassberger–Procaccia algorithm, a method for calculating the correlation dimension using matrix computations has been developed and tested. This method involves constructing a distance matrix between points of the attractor in phase space, sorting the matrix, and analyzing the logarithmic dependency graph. The developed methods have been applied to «reference» attractors: the logistic map, Henon map, Kaplan–Yorke attractor, Zaslavsky attractor, Lorenz, Rössler and Rabinovich–Fabrikant systems. This application confirmed theoretical aspects through experimental results. The use of matrix-based computations has enabled not only an increase in the calculation speed but also improved the accuracy of the estimates, as the method accounts for all points of the attractor.

The study results indicate that the three-dimensional attractors of Lorenz, Rössler, and Rabinovich–Fabrikant systems have a correlation dimension within the range  $2 < D_c < 3$ , aligning with theoretical predictions and consistent with previous estimates. Meanwhile, the correlation dimension for shuffled data is significantly higher and approaches the dimensionality of the phase space, indicating the destruction of the attractor's delicate fractal structure.

The described methods generalize the research conducted by the authors and can be applied to a wide range of problems in physical and economic dynamics. The article contributes to the development of methods for assessing the fractal characteristics of attractors and expanding their application in scientific studies.

**Keywords:** correlation dimension, attractors, phase space, dynamical systems, distance matrix, Grassberger–Procaccia method, fractal structure, chaos.

*Одержано редакцією 08.05.2024*

*Прийнято до друку 23.06.2024*