

## ФІЗИКА МАТЕРІАЛІВ

ORCID: 0000-0003-2737-2050

### С. В. БАБЕНКО

Кандидат фізико-математичних наук, старший викладач, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна

[differenceeq@vu.cdu.edu.ua](mailto:differenceeq@vu.cdu.edu.ua)

ORCID: 0009-0007-1750-8395

### А. В. ГОНЧАРЕНКО

Магістрантка, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна

[honcharenko.anna1619@vu.cdu.edu.ua](mailto:honcharenko.anna1619@vu.cdu.edu.ua)

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-3-20

PACS: 89.20.Bb, 07.90+c

### ПОБУДОВА КЕРУВАННЯ, ЩО ЗАБЕЗПЕЧУЄ ТРЕКІНГ ЛІДЕРА У СИСТЕМІ БПЛА ПЛАНЕРНОГО ТИПУ

*У статті розглядається система, утворена двома БПЛА планерного типу. Прикладами таких БПЛА є керовані бомби (наприклад, бомба GBU виробництва компанії Boeing). Специфікою БПЛА-планерів є те, що вони летять не за допомогою двигунів, як це роблять ракети, літаки чи коптери, а виключно під дією сили тяжіння та аеродинамічних сил, зумовлених геометрією об'єкта (наявність крил).*

*Один із планерів системи виконує роль лідера, тобто керування ним здійснюється автоматично за заданим алгоритмом або ж ним керує оператор. Припускається, що завдання лідера – вразити певну ціль на Землі. Другий планер системи є послідовником, для якого передбачена можливість будувати автоматичне керування. Задача полягає в тому, щоб побудувати для послідовника таке керування, за допомогою якого він би слідував за лідером, так щоб влучити в ціль, на яку орієнтований лідер. Для побудови такого керування у першій частині статті сформульовано умову слідування послідовника за лідером. А саме, під слідуванням послідовника за лідером мається на увазі такий рух послідовника, при якому виконується принаймні одна з умов: 1) співнапрямленими є вектор швидкості  $\mathbf{V}$  послідовника та вектор, що рівний різниці радіус-вектора  $\mathbf{r}_0$  центра мас лідера і радіус-вектора  $\mathbf{r}$  центра мас послідовника, 2) положення послідовника і лідера співпадають. У другій частині статті на основі диференціальних рівнянь руху виведено рівняння для похибки, за яку приймається векторний добуток векторів  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$  та  $\mathbf{V}$ . Показано, що за певних припущень рівність нулю похибки еквівалентна умові слідування послідовника за лідером. На основі рівнянь для похибки, використовуючи принцип керування ковзним режимом, побудовано керування для планера-послідовника у вигляді закону зміни вектора його кутової швидкості.*

**Ключові слова:** плануючий БПЛА, трекінг лідера, керування, ковзний режим, Matlab.

## 1. Вступ

Беззаперечним є той факт, що у російсько-українській війні важливу роль відіграють технології, пов'язані з БПЛА. Окреме місце тут займають БПЛА планерного типу, прикладами яких є керовані авіабомби. Специфікою БПЛА-планерів є те, що вони летять не за допомогою двигунів, як це роблять ракети, літаки чи коптери, а виключно під дією сили тяжіння та аеродинамічних сил, зумовлених геометрією об'єкта (наявність крил). До прикладу, компанія Boeing виробляє бомби GBU, що є звичайними авіабомбами, які оснащують сучасною системою JDAM (Joint Direct Attack Munition). Згідно інформації, наведеної на офіційному сайті Повітряних Сил США, JDAM є хвостовим комплектом наведення, який перетворює некеровану бомбу на «розумну». Бомби, обладнані такою системою, здатні вражати цілі в радіусі 15 миль від місця запуску з літака. При цьому влучання відбувається з похибкою до 5 метрів.

Розвиток технологій, пов'язаних з БПЛА планерного типу має дві компоненти – технічну і теоретичну. До теоретичної компоненти можна віднести побудову математичних моделей, які описують динаміку БПЛА, синтез керувань, який здійснюється на основі цих моделей, та побудову програмних компонент, за допомогою яких реалізуються синтезовані керування. Щодо побудови математичних моделей та синтезу керувань, то в останнє десятиліття з'являється все більше публікацій, присвячених цій тематиці. У них пропонуються різноманітні схеми керування, які дозволяють плануючим об'єктам виконувати певні задачі. Частина робіт присвячена дослідженню поведінки одного БПЛА. Так, в роботі [9] пропонується керування для плануючої бомби, що дозволяє їй влучити у ціль на заданій висоті над поверхнею землі і під заданим кутом до вертикальної площини, яка проходить через цю ціль. Для побудови такого керування використовується метод наведення по векторному полю (vector field guidance). У роботі [5] плануюча бомба розглядається як точка, а не як тверде тіло. В рамках такої математичної моделі пропонується оптимальне керування, яке дозволяє бомбі досягнути заданої точки. Для побудови керування використовується ідея методу, який автори називають shooting method. Стаття [2] присвячена побудові керування у вигляді PID контролера для стабілізації орієнтації бомби. З огляду на специфіку контролерів такого типу, у згаданих статтях розглядаються лінеаризовані рівняння руху об'єкта керування. Стаття [11] присвячена побудові керування, яке стабілізує орієнтацію планера. Планер розглядається як тверде тіло, що має 6 ступенів вільності. Для побудови керування використано метод nonlinear dynamic inversion (NDI). У статті [4] пропонується моделювання і симуляція руху планера, який розглядається як тверде тіло, що вільно падає під дією сили тяжіння.

Інша частина присвячена дослідженню мульти-агентних систем БПЛА планерного типу. У них пропонуються так звані кооперативні схеми (опис завдань, які агенти мають виконувати спільно при взаємодії один з одним) і будуються керування, які дозволяють ці схеми реалізовувати. Так, у [14] для мульти-агентної системи, утвореної надзвуковими планерами, побудоване розподілене керування формацією за припущення, що рух усіх агентів описується однаковими рівняннями. Мета керування полягає в тому, щоб відстані між планерами по  $X$  та  $Y$  координатах прямували до заданих значень. У статті [13] також розглядається мульти-агентна система надзвукових планерів, для якої будується керування, при якому дальність до цілі кожного планера прямує до середнього арифметичного дальностей до цілі усіх планерів системи. У статті [8] розглядається система двох надзвукових планерів, для яких будуються індивідуальні траєкторії і керування, завдяки яким обидва планери одночасно влучають у ціль.

Таким чином, актуальною залишається задача про побудову керування для планера, за допомогою якого він слідує за іншим планером. Мета дослідження,

результати якого запропоновані у даній статті, полягає в тому, щоб сформулювати умову «слідування» планером-послідовником за планером-лідером та синтезувати керування, яке забезпечує відповідну поведінку послідовника, за наявності збурень та варіації параметрів системи.

## 2. Постановка задачі. Критерій слідування планером-послідовником за планером-лідером

Розглянемо систему, яка складається з БПЛА планерного типу. Прикладами таких БПЛА є керовані авіаційні бомби (рис. 1, а) та малогабаритні високоточні боеприпаси GLSDB (рис. 1, б).

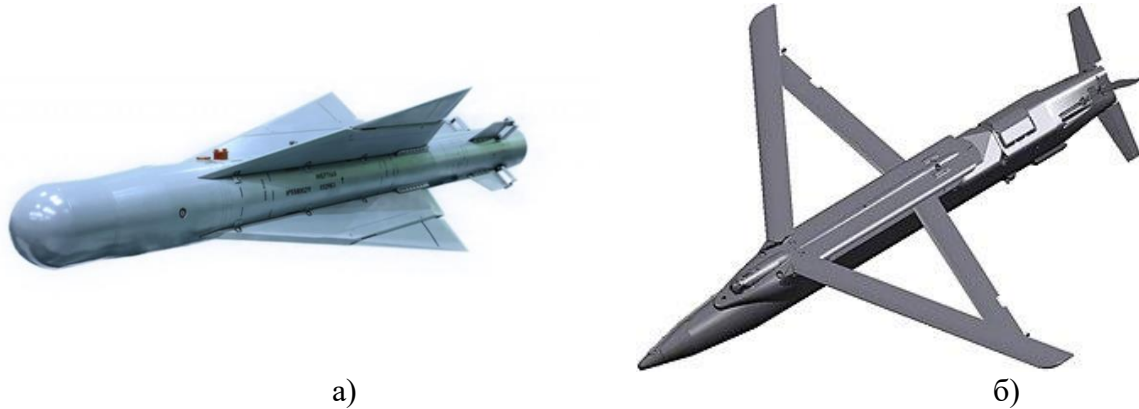


Рис. 1. а) Авіабомба УПАВ-1500В [1].  
б) Бомба GBU-39, яка є складовою GLSDB [6].

Fig. 1. a) UPAВ-1500V air bomb [1].  
b) GBU-39 bomb, which is a component of GLSDB [6].

Надалі об'єкти системи будемо називати коротко – планери. Припускається, що усі планери починають свій рух з деякої точки (чи декількох різних точок) над поверхнею Землі (наприклад, з висоти 10 км) і вільно падають донизу під дією сили тяжіння та аеродинамічних сил. Запуск з початкової точки може здійснюватися, наприклад, за допомогою літака.

При цьому один із планерів системи виконує роль лідера, тобто керування ним здійснюється автоматично за заданим алгоритмом або ж оператором. Припускається, що завдання лідера – вразити певну ціль на Землі. Решта планерів системи є послідовниками, для яких є можливість будувати керування, за допомогою яких вони певним чином рухаються за лідером. *Задача полягає в тому, щоб побудувати для послідовників таке керування, за допомогою якого вони рухалися б так, щоб влучити в околі цілі лідера.*

**Означення 1.** Будемо рух послідовників, описаний вище, називати слідуванням за лідером.

Припускається, що послідовник отримує в режимі онлайн інформацію про свій стан та стан лідера (координати місця знаходження, значення вектора швидкості та ін.). Припустимо також, що послідовник один, оскільки задача про побудову керування для групи послідовників суттєво ускладнюється необхідністю враховувати те, що окрім виконання завдань рухатися за планером-лідером, планери-послідовники повинні уникати зіткнень між собою.

Дослідимо, за яких обставин можна вважати, що послідовник слідує за лідером. Видається природнім вважати, що послідовник влучить в околі цілі лідера, якщо різниці координат і швидкостей послідовника і лідера прямують до нуля або до деякого

відмінного від нуля значення при  $t \rightarrow \infty$  або за скінченний час. Цього можна досягнути у випадку, коли роботи системи мають власні двигуни, що дозволяють прискорювати чи сповільнювати рух. Особливістю ж планерів є те, що вони не мають двигунів, а тому планер-послідовник, взагалі кажучи, не може наздогнати планера-лідера у випадку відставання, бо його швидкість зумовлена тільки силою тяжіння, двигуна він не має. Відповідно, досягти прямування до нуля чи деякого відмінного від нуля значення різниць координат і швидкостей послідовника і лідера, взагалі кажучи, не вдасться. Враховуючи цю особливість, пропонується новий критерій слідування послідовника за лідером. Позначимо через  $\mathbf{r}_0$  та  $\mathbf{r}$  (далі у статті скрізь жирним шрифтом позначаються вектори, звичайним – скалярні величини та матриці) радіуси-вектори центрів мас  $M_0$  і  $M$  планера-лідера та планера-послідовника, відповідно, а через  $\mathbf{V}_0$  та  $\mathbf{V}$  – вектори їхніх швидкостей, відповідно, в довільний момент часу (див. рис. 2). Уточнимо означення 1 так.

**Означення 2.** Слідуванням послідовника за лідером будемо мати на увазі такий рух послідовника, при якому вектори  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$  та  $\mathbf{V}$  є співнапрямленими, тобто кут  $\sigma$  між цими векторами рівний нулю, або ж вектор  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$  дорівнює нулю, тобто положення послідовника і лідера співпадають.

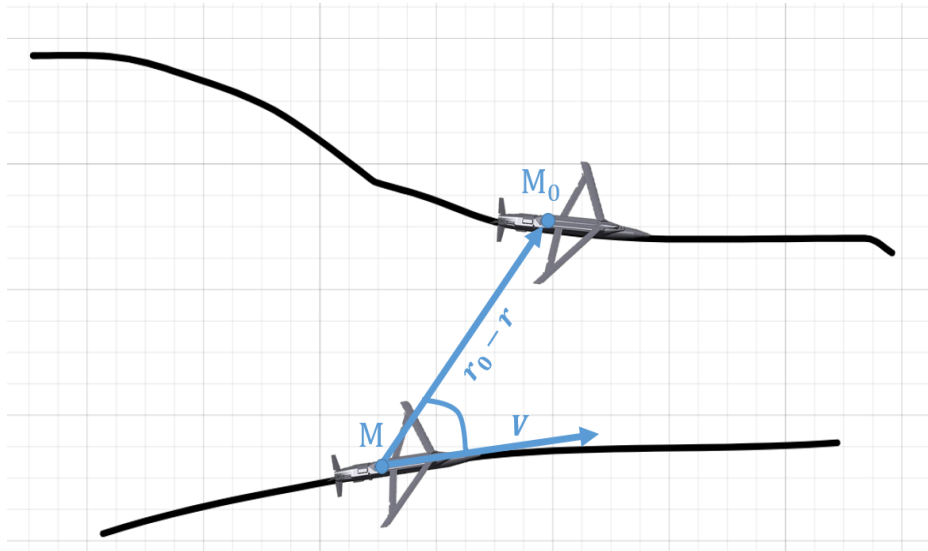


Рис. 2. Кут між векторами  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$  та  $\mathbf{V}$ . Точки  $M_0$  та  $M$  позначають центри мас планера-лідера та планера-послідовника, відповідно.

Fig. 2. The angle between vectors  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$  and  $\mathbf{V}$ . Points  $M_0$  and  $M$  denote the centers of mass of the leader glider and the follower glider, respectively.

Таке означення видається природнім, оскільки якщо послідовник буде намагатися рухатися так, щоб виконувалася умова співнапрямленості векторів, то послідовник влучить в околі цілі лідера. Коли ж станеться так, що положення послідовника співпадатиме з положенням лідера (див. рис. 3), то обидва планери влучать точно в одну ціль. Щоправда, співпадіння положень означає зіткнення планерів і цієї ситуації треба уникати, але це інша задача, яку ми не розглядаємо.

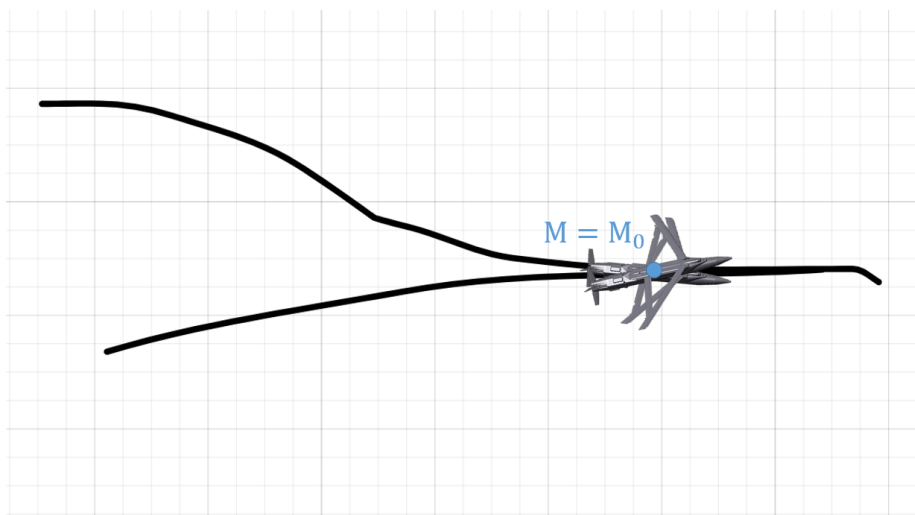


Рис. 3. Співпадіння положень планера-лідера та планера-послідовника.  
Fig. 3. Coincidence of the positions of the leader glider and the follower glider.

Таким чином, критерій слідування послідовника за лідером має вигляд:

$$\sigma(t) = \angle(\mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}(t), \mathbf{V}(t)) \rightarrow 0 \text{ або } \mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}(t) \rightarrow 0, \quad (1)$$

при  $t \rightarrow \infty$  (тобто, асимптотично).

Отже, задача полягає в тому, щоб побудувати таке керування для планера-послідовника, за допомогою якого він би рухався так, щоб при цьому виконувалися умови (1).

Для того, щоб виходячи з критерію (1) побудувати необхідні керування, потрібно обчислити кут  $\sigma$ , виразивши його через параметри системи, або ж ввести допоміжну величину, яка певним чином пов'язана з кутом. Якщо піти першим (прямим) шляхом, то кут можна обчислити, використовуючи відому формулу для скалярного добутку:

$$\cos \sigma = \frac{\langle \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, \mathbf{V} \rangle}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\| \cdot \|\mathbf{V}\|}, \quad (2)$$

де  $\langle \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, \mathbf{V} \rangle$  позначає скалярний добуток векторів  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$  та  $\mathbf{V}$ , а в знаменнику записаний добуток їх норм. Для полегшення сприйняття аргументи в дужках опущено.

З формули (2) одержимо, що  $\sigma = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, \mathbf{V} \rangle}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\| \cdot \|\mathbf{V}\|}\right)$ . Далі, якщо керування будується досяганням ковзних режимів, то  $\sigma$  необхідно буде диференціювати по  $t$ , з тією метою щоб отримати диференціальне рівняння, якому ця величина задовольняє. Однак, вираз для  $\sigma$  утворений композицією аркфункції, дроби, коренів, тому диференціювання призведе до складних виразів, з якими потім буде складно працювати. Крім того, у ситуації співпадіння положень послідовника і лідера кут між векторами  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$  та  $\mathbf{V}$  взагалі невизначений. З огляду на описані особливості роботи з формулою для величини  $\sigma$ , у даній роботі пропонується замість  $\sigma$  розглянути допоміжну величину, яка непрямо характеризує  $\sigma$ . У якості такої величини розглянемо векторний добуток  $(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \times \mathbf{V}$ . Як відомо, модуль векторного добутку двох векторів дорівнює добутку їх модулів на синус кута між цими векторами. Звідси слідує, що якщо кут між векторами дорівнює нулю, то їх векторний добуток дорівнює нулю. Обернене твердження, взагалі кажучи, хибне, оскільки причиною того, що векторний добуток двох векторів дорівнює нулю, може бути не тільки рівність нулю кута між векторами, але й інші обставини: кут між векторами дорівнює 180 градусів чи якийсь із цих векторів є нуль-вектором. Таким чином, умова

$$(\mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}(t)) \times \mathbf{V}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \quad (3)$$

при  $t \rightarrow \infty$ , не є умовою, еквівалентною умові (1). Однак, за певних припущень еквівалентність можна досягнути. Зробимо ці припущення.

**Припущення 1.** Запуск планера-лідера і планера-послідовника відбувається так, що з деякого моменту часу і впродовж усього часу подальшого їх польоту кут між  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$  та  $\mathbf{V}$ , виражений у градусах, має верхню межу, що є числом, меншим за 90 градусів.

**Припущення 2.** Швидкості планера-лідера і планера-послідовника мають додатну нижню межу на всьому відтинку часу їх польоту.

За Припущень 1 і 2 умови (1) і (3) еквівалентні, оскільки ці припущення гарантують, що векторний добуток у формулі (3) дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли дорівнює нулю кут між векторами  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$  та  $\mathbf{V}$  або ж дорівнює нулю вектор  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$ .

Векторний добуток з формули (3) будемо називати похибкою і позначатимемо через  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

### 3. Основний результат

#### 3.1. Диференціальні рівняння руху планера-лідера та планера-послідовника

Для того, щоб побудувати керування, які забезпечують виконання умови (3), необхідно записати диференціальні рівняння, яким задовольняє похибка. Для побудови цих диференціальних рівнянь потрібно мати рівняння руху послідовника та лідера. У статті [11] наведено диференціальні рівняння, які описують рух повітряного апарата планерного типу (див. рис. 4). Як зазначено у [11], ці рівняння описують рух планера за таких припущень: планер розглядається як тверде тіло, обертання Землі не враховується, моменти інерції і центр мас планера вважаються сталими,  $X - Z$  площина планера припускається симетричною.

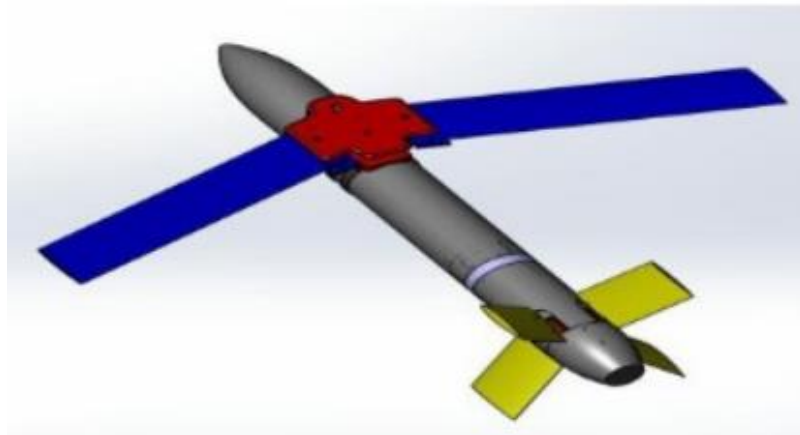


Рис. 4. Геометрія планера, виконана в CAD [11].

Fig. 4. The geometry of the AGV body's airframe in CAD [11].

Згадані вище рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{-mg \sin \theta - F_x}{m} + rv - qw \\ \dot{v} &= \frac{mg \sin \varphi \cos \theta + F_y}{m} - ru + pw \\ \dot{w} &= \frac{mg \cos \varphi \cos \theta - F_z}{m} + qu - pv \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{1}{I_{xx}}(L + (I_{yy} - I_{zz})qr) \\ \dot{q} &= \frac{1}{I_{yy}}(M + (I_{zz} - I_{xx})rp) \\ \dot{r} &= \frac{1}{I_{zz}}(N + (I_{xx} - I_{yy})pq)\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= p + q \sin \varphi \tan \theta + r \cos \varphi \tan \theta \\ \dot{\theta} &= q \cos \varphi - r \sin \varphi \\ \dot{\psi} &= q \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} + r \frac{\cos \varphi}{\cos \theta}\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u(\cos \theta \cos \psi) + v(\sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) + \\ &\quad + w(\cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) \\ \dot{y} &= u(\cos \theta \sin \psi) + v(\sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) + \\ &\quad + w(\cos \varphi \sin \theta \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) \\ \dot{z} &= u(-\sin \theta) + v(\sin \varphi \cos \theta) + w(\cos \varphi \cos \theta)\end{aligned}\quad (7)$$

У цих рівняннях змінні  $\varphi$ ,  $\theta$  і  $\psi$  позначають кути Ейлера,  $p$ ,  $q$  та  $r$  – компоненти вектора кутової швидкості,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – координати центра мас планера у системі координат, пов'язаній із Землею,  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  – головні моменти інерції планера.  $F_x, F_y, F_z$  і  $L, M, N$  позначають аеродинамічні сили і моменти відповідно і обчислюються за формулами:

$$F_x = \bar{q}SC_D, F_y = \bar{q}SC_Y, F_z = \bar{q}SC_L \quad (8)$$

$$L = \bar{q}SbC_L, M = \bar{q}ScC_m, N = \bar{q}SbC_n \quad (9)$$

Коефіцієнти у формулах (8) і (9) у свою чергу представляються згідно [11] як лінійні комбінації параметрів, що незалежно один від одного визначають специфіку польоту.

$$\begin{aligned}C_D &= C_{D_0} + (C_L - C_{L_0})2\pi e \cdot AR + |C_{D_{\delta_e}} \delta_e| + |C_{D_{\delta_a}} \delta_a| + |C_{D_{\delta_r}} \delta_r| \\ C_Y &= C_{y_\beta} \beta + C_{y_{\delta_a}} \delta_a + C_{y_{\delta_r}} \delta_r + \frac{b}{2V_T}(C_{y_p} p + C_{y_r} r) \\ C_L &= C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + \frac{c}{2V_T}(C_{L_\alpha} \dot{\alpha} + C_{L_q} q) \\ C_m &= C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta_e}} \delta_e + \frac{c}{2V_T}(C_{m_\alpha} \dot{\alpha} + C_{m_q} q) \\ C_l &= C_{l_\beta} \beta + C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \delta_r + \frac{b}{2V_T}(C_{l_p} p + C_{l_r} r) \\ C_n &= C_{n_\beta} \beta + C_{n_{\delta_a}} \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \delta_r + \frac{b}{2V_T}(C_{n_p} p + C_{n_r} r)\end{aligned}\quad (10)$$

У цих формулах літерою  $C$  з індексами позначено аеродинамічні коефіцієнти;  $\delta_a, \delta_e, \delta_r$  позначають відхилення елерона, руля висоти і керма напрямку, відповідно.  $\alpha$  позначає кут атаки;  $\beta$  – кут бокового ковзання;  $C_{D_0}, C_{L_0}, C_{m_0}$  є аеродинамічними коефіцієнтами при нульовому куті атаки,  $\bar{q}$  позначає динамічний тиск,  $V_T$  – швидкість набігаючого повітряного потоку,  $AR$  характеризує геометрію крила,  $e$  – коефіцієнт Освальда. Більш детальний опис цих параметрів, а також приклади їх можливих значень можна знайти у роботі [4].

Рівняння (4)-(7) візьмемо в якості рівнянь руху планера-послідовника у нашій системі послідовник-лідер. При цьому параметрами керування планера-послідовника вважатимемо змінні  $\delta_a, \delta_e$  і  $\delta_r$ .

Для зручності подальших обчислень, запишемо системи (4)-(7) у такій векторно-матричній формі:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{X}} &= \bar{A}(\Gamma)\mathbf{v}, \\
 \dot{\Gamma} &= \bar{B}(\Gamma)\Omega, \\
 \dot{\Omega} &= \mathbf{f}(\Omega) + C\mathbf{u}_1, \\
 \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{g}(\Gamma, \mathbf{u}_1) + G_1(\mathbf{V})\Omega,
 \end{aligned} \tag{11}$$

де:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix}, \\
 \bar{A}(\Gamma) &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}, \\
 \bar{B}(\Gamma) &= \begin{bmatrix} 1 & \sin \varphi \tan \theta & \cos \varphi \tan \theta \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} & \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{f}(\Omega) &= \begin{bmatrix} \frac{\bar{q}Sb}{I_{xx}} \left( C_{l_\beta} \beta + \frac{b}{2V_T} (C_{l_p} p + C_{l_r} r) \right) + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} q r \\ \frac{\bar{q}Sc}{I_{yy}} \left( C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + \frac{c}{2V_T} (C_{m_\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_{m_q} q) \right) + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} r p \\ \frac{\bar{q}Sb}{I_{zz}} \left( C_{n_\beta} \beta + \frac{b}{2V_T} (C_{n_p} p + C_{n_r} r) \right) + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} p q \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{g}(\Gamma, \mathbf{u}_1) &= \begin{bmatrix} -g \sin \theta - \frac{\bar{q}SC_D}{m} \\ g \sin \varphi \cos \theta + \frac{\bar{q}S}{m} (C_{y_\beta} \beta + C_{y_{\delta_a}} \delta_a + C_{y_{\delta_r}} \delta_r) \\ g \cos \varphi \cos \theta - \frac{\bar{q}S}{m} (C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + \frac{c}{2V_T} \cdot C_{L_\dot{\alpha}} \dot{\alpha}) \end{bmatrix}, \\
 G_1(\mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} 0 & v & -w \\ \frac{\bar{q}SbC_{y_p}}{2mV_T} + w & 0 & \frac{\bar{q}SbC_{y_p}}{2mV_T} - u \\ -v & -\frac{\bar{q}SbC_{L_q}}{2mV_T} + u & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \frac{\bar{q}SbC_{l_{\delta_a}}}{I_{xx}} & 0 & \frac{\bar{q}SbC_{l_{\delta_r}}}{I_{xx}} \\ 0 & \frac{\bar{q}ScC_{m_{\delta_e}}}{I_{yy}} & 0 \\ \frac{\bar{q}SbC_{n_{\delta_a}}}{I_{zz}} & 0 & \frac{\bar{q}SbC_{n_{\delta_r}}}{I_{zz}} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Аналогічний вигляд мають також рівняння планера-лідера. Нижче наведено ці рівняння, записані вже у векторно-матричному вигляді:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{X}}_0 &= \bar{A}(\Gamma_0)\mathbf{v}_0, \\
 \dot{\Gamma}_0 &= \bar{B}(\Gamma_0)\Omega_0, \\
 \dot{\Omega}_0 &= \mathbf{f}(\Omega_0) + C\mathbf{u}_1^0, \\
 \dot{\mathbf{v}}_0 &= \mathbf{g}(\Gamma_0, \mathbf{u}_1^0) + G_1(\mathbf{v}_0)\Omega_0,
 \end{aligned} \tag{12}$$

де:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \Gamma_0 = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix}, \Omega_0 = \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1^0 = \begin{bmatrix} \delta_{a0} \\ \delta_{e0} \\ \delta_{r0} \end{bmatrix}.$$

Компоненти цих векторів мають той же сенс, що і аналогічні компоненти у рівняннях планера-послідовника, тільки цей сенс стосується планера-лідера. Функції  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $G_1$  та матриця  $C$  – ті ж самі, що і для планера-послідовника, тільки з відповідними аргументами.

Керування  $\mathbf{u}_1^0$  лідера вважається відомим на відміну від керування  $\mathbf{u}_1$  послідовника, яке нам треба синтезувати.

### 3.2. Загальна схема керування. Виведення диференціальних рівнянь для похибки

Як уже згадувалося у попередньому пункті цього розділу, для побудови керувань, тобто такого закону зміни параметрів керування  $\delta_a$ ,  $\delta_e$  і  $\delta_r$ , при якому виконується умова (3) для похибки  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , необхідно записати диференціальні рівняння для  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Для цього обчислимо  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Згідно визначення,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}(t)) \times \mathbf{V}(t)$ .

З огляду на рівняння руху (11) - (12) послідовника і лідера, у цій формулі  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{X}_0$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{X}$ , а  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{X}}$ , тобто  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}) \times \dot{\mathbf{X}}$ . Виходячи з означення і властивостей векторного добутку та властивостей операції диференціювання, одержуємо, що:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\dot{\mathbf{X}}_0 - \dot{\mathbf{X}}) \times \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}) \times \ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}_0 \times \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}) \times \ddot{\mathbf{X}}.$$

Отже, формула для  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  має вигляд:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{X}}_0 \times \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}) \times \ddot{\mathbf{X}}. \quad (13)$$

В отриманому виразі функції  $\dot{\mathbf{X}}$ ,  $\ddot{\mathbf{X}}$  обчислюються за формулами (11) і (12) відповідно, а функція  $\dot{\mathbf{X}}$  є похідною по  $t$  функції  $\dot{\mathbf{X}}$ . Обчислимо  $\ddot{\mathbf{X}}$  використовуючи систему рівнянь (7), а саме, продиференціювавши кожне рівняння цієї системи. Одержимо:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \dot{u} \cos \theta \cos \psi - u(\dot{\theta} \sin \theta \cos \psi + \dot{\psi} \sin \psi \cos \theta) + \dot{v}(\sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) \\ & + v(\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta \cos \psi - \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta \sin \psi \\ & + \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \psi - \dot{\psi} \cos \varphi \cos \psi) + \dot{w}(\cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) \\ & + w(-\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta \sin \psi \\ & + \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \psi + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & \dot{u} \cos \theta \sin \psi - u(\dot{\theta} \sin \theta \sin \psi - \dot{\psi} \cos \theta \cos \psi) + \dot{v}(\sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \\ & + v(\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta \sin \psi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta \cos \psi \\ & - \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \psi - \dot{\psi} \cos \varphi \sin \psi) + \dot{w}(\cos \varphi \sin \theta \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) \\ & + w(-\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta \sin \psi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ & + \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \psi - \dot{\psi} \sin \varphi \sin \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} = & -\dot{u} \sin \theta - u\dot{\theta} \cos \theta + \dot{v} \sin \varphi \cos \theta + v(\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta) + \dot{w} \cos \varphi \cos \theta \\ & - w(\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta) \end{aligned}$$

Позначимо цю систему з трьох рівнянь номером (14) і перепишемо її у вигляді:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{M} \cdot (\dot{\mathbf{v}}^T, \dot{\boldsymbol{\Omega}}^T)^T. \quad (15)$$

Тепер можна бачити, що якщо у остаточний вираз для  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  підставити формули для обчислення  $\dot{\mathbf{X}}$ ,  $\dot{\mathbf{X}}_0$  та  $\ddot{\mathbf{X}}$ , то в отримане представлення для  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  будуть входити компоненти векторної функції  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{u}_1)$ , але не будуть входити компоненти вектора  $\mathbf{C}\mathbf{u}_1$ , тобто диференціальне рівняння для  $\boldsymbol{\varepsilon}$  буде містити не всі вирази, які містять керування  $\mathbf{u}_1$ . Іншими словами, керування  $\mathbf{u}_1$  не напряму впливає на  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , тобто компоненти керування  $\mathbf{u}_1$  у явному вигляді є у виразі для  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , але також ці компоненти присутні там і неявно: через диференціальне рівняння для  $\boldsymbol{\Omega}$  з формул (11) вони впливають на компоненти вектора  $\boldsymbol{\Omega}$ , а ті в свою чергу входять у вираз для  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Описану ситуацію можна коротко записати так:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{u}_1), \mathbf{u}_1). \quad (16)$$

Така залежність  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  від  $\mathbf{u}_1$  створює проблеми для застосування до (16) методів побудови нелінійних керувань, зокрема методу ковзних режимів. Проблема із

застосуванням останнього зумовлене тим, що права частина диференціального рівняння (16) для похибки нелінійно залежить від керування  $\mathbf{u}_1$ .

Для вирішення цієї проблеми пропонується будувати керування у два етапи. Враховуючи рівняння (11), (12), (14) та (15), запишемо диференціальне рівняння (13) для похибки  $\boldsymbol{\varepsilon}$  у вигляді:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{H}, \quad (17)$$

де  $\mathbf{G}, \mathbf{H}$  – квадратна матриця розмірності 3 і вектор розмірності 3 відповідно. Елементи матриці  $\mathbf{G}$  обчислюються за формулами, які позначимо номером (18).

$$G_{11} = -F_{yp}\Delta z c\varphi c\psi + F_{yp}\Delta y c\theta s\varphi - 2\Delta zw c\varphi c\psi + 2\Delta zv c\psi s\varphi - F_{yp}\Delta z s\varphi s\psi s\theta$$

$$G_{21} = -F_{yp}\Delta z c\varphi s\psi - F_{yp}\Delta x c\theta s\varphi + F_{yp}\Delta z c\psi s\varphi s\theta$$

$$G_{31} = -2\Delta xv c\psi s\varphi + F_{yp}\Delta y c\varphi s\psi + 2\Delta xw c\varphi c\psi + F_{yp}\Delta x c\varphi c\psi - F_{yp}\Delta y c\psi s\varphi s\theta +$$

$$F_{yp}\Delta x s\varphi s\psi s\theta$$

$$G_{12} = -\frac{1}{c\theta} (F_{zq}\Delta y c\varphi c^2\theta - 2\Delta zw s\psi + 2\Delta zw c^2\varphi s\psi - F_{zq}\Delta z c\psi c\theta s\varphi +$$

$$2\Delta zu c\psi c\theta s\varphi - F_{zq}\Delta z c\varphi c\theta s\psi s\theta + 2\Delta zw c\varphi c\psi s\varphi s\theta)$$

$$G_{22} = -F_{zq}\Delta z s\varphi s\psi + F_{zq}\Delta x c\varphi c\theta - F_{zq}\Delta z c\varphi c\psi s\theta$$

$$G_{32} = \frac{1}{c\theta} (2\Delta xw c^2\varphi s\psi - 2\Delta xws\psi - F_{zq}\Delta x c\psi c\theta s\varphi + F_{zq}\Delta y c\theta s\varphi s\psi +$$

$$2\Delta xu c\psi c\theta s\varphi + F_{zq}\Delta y c\varphi c\psi c\theta s\theta - F_{zq}\Delta x c\varphi c\theta s\psi s\theta + 2\Delta xw c\varphi c\psi s\varphi s\theta)$$

$$G_{13} = -\frac{1}{c\theta} (2\Delta zw c^2\varphi c\psi s\theta - F_{yr}\Delta y c^2\theta s\varphi + F_{yr}\Delta z c\varphi c\psi c\theta - 2\Delta zw c\varphi s\varphi s\psi +$$

$$F_{yr}\Delta z c\theta s\varphi s\psi s\theta)$$

$$G_{23} = -F_{yr}\Delta z c\varphi s\psi - F_{yr}\Delta x c\theta s\varphi + F_{yr}\Delta z c\psi s\varphi s\theta$$

$$G_{33} = \frac{1}{\cos\theta} (2\Delta xw c^2\varphi c\psi s\theta + F_{yr}\Delta x c\varphi c\psi c\theta + F_{yr}\Delta y c\varphi c\theta s\psi - 2\Delta xw c\varphi s\varphi s\psi -$$

$$F_{yr}\Delta y c\psi c\theta s\varphi s\theta + F_{yr}\Delta x c\theta s\varphi s\psi s\theta)$$

Компоненти вектора  $\mathbf{H}$  обчислюються за формулами, які позначимо номером (19).

$$H_1 = -F_{y0}\Delta z c\varphi c\psi + F_x\Delta y s\theta + \Delta yg - F_{z0}\Delta y c\varphi c\theta + F_{z0}\Delta z c\psi s\varphi + F_{y0}\Delta y c\theta s\varphi +$$

$$F_x\Delta z c\theta s\psi + F_{z0}\Delta z c\varphi s\varphi s\theta - F_{y0}\Delta z s\varphi s\psi s\theta + uv_0 c\varphi_0 c\psi_0 s\theta - u_0v c\varphi c\psi s\theta_0 +$$

$$uw_0 c\psi_0 s\varphi_0 s\theta - u_0w c\psi s\varphi s\theta_0 - uu_0 c\theta s\psi s\theta_0 + uu_0 c\theta_0 s\psi_0 s\theta -$$

$$2\Delta zg c\varphi c\psi c\theta s\varphi + vw_0 c\varphi c\varphi_0 c\psi c\theta_0 - v_0w c\varphi c\varphi_0 c\psi_0 c\theta + vv_0 c\varphi c\psi c\theta_0 s\varphi_0 -$$

$$vv_0 c\varphi_0 c\psi_0 c\theta s\varphi - ww_0 c\varphi c\psi_0 c\theta s\varphi_0 + ww_0 c\varphi_0 c\psi c\theta_0 s\varphi + uw_0 c\varphi_0 c\theta c\theta_0 s\psi -$$

$$u_0w c\varphi c\theta c\theta_0 s\psi_0 - vw_0 c\psi_0 c\theta s\varphi s\varphi_0 + v_0w c\psi c\theta_0 s\varphi s\varphi_0 + uv_0 c\theta c\theta_0 s\varphi_0 s\psi -$$

$$u_0v c\theta c\theta_0 s\varphi s\psi_0 + uw_0 c\varphi_0 s\psi_0 s\theta s\theta_0 - u_0w c\varphi s\psi s\theta s\theta_0 + uv_0 s\varphi_0 s\psi_0 s\theta s\theta_0 -$$

$$u_0v s\varphi s\psi s\theta s\theta_0 - ww_0 c\varphi c\varphi_0 c\theta s\psi_0 s\theta_0 + ww_0 c\varphi c\varphi_0 c\theta_0 s\psi s\theta -$$

$$vw_0 c\varphi_0 c\theta s\varphi s\psi_0 s\theta_0 + vw_0 c\varphi_0 c\theta_0 s\varphi s\psi s\theta - v_0w c\varphi c\theta s\varphi_0 s\psi_0 s\theta_0 +$$

$$v_0w c\varphi c\theta_0 s\varphi_0 s\psi s\theta - vv_0 c\theta s\varphi s\varphi_0 s\psi_0 s\theta_0 + vv_0 c\theta_0 s\varphi s\varphi_0 s\psi s\theta$$

$$\begin{aligned}
H_2 = & -\Delta x g - F_x \Delta x s \theta + F_{z_0} \Delta x c \varphi c \theta - F_x \Delta z c \psi c \theta - F_{y_0} \Delta z c \varphi s \psi - F_{y_0} \Delta x c \theta s \varphi - \\
& F_{z_0} \Delta z s \varphi s \psi - F_{z_0} \Delta z c \varphi c \psi s \theta + F_{y_0} \Delta z c \psi s \varphi s \theta + u u_0 c \psi c \theta s \theta_0 - u u_0 c \psi_0 c \theta_0 s \theta + \\
& u v_0 c \varphi_0 s \psi_0 s \theta - u_0 v c \varphi s \psi s \theta_0 - u w_0 s \varphi_0 s \psi_0 s \theta + u_0 w s \varphi s \psi s \theta_0 - \\
& u w_0 c \varphi_0 c \psi c \theta c \theta_0 + u_0 w c \varphi c \psi_0 c \theta c \theta_0 + v w_0 c \varphi c \varphi_0 c \theta_0 s \psi - v_0 w c \varphi c \varphi_0 c \theta s \psi_0 - \\
& u v_0 c \psi c \theta c \theta_0 s \varphi_0 + u_0 v c \psi_0 c \theta c \theta_0 s \varphi + v v_0 c \varphi c \theta_0 s \varphi_0 s \psi - v v_0 c \varphi_0 c \theta s \varphi s \psi_0 + \\
& w w_0 c \varphi c \theta s \varphi_0 s \psi_0 - w w_0 c \varphi_0 c \theta_0 s \varphi s \psi - u w_0 c \varphi_0 c \psi_0 s \theta s \theta_0 + u_0 w c \varphi c \psi s \theta s \theta_0 + \\
& v w_0 c \theta s \varphi s \varphi_0 s \psi_0 - v_0 w c \theta_0 s \varphi s \varphi_0 s \psi - u v_0 c \psi_0 s \varphi_0 s \theta s \theta_0 + u_0 v c \psi s \varphi s \theta s \theta_0 - \\
& w w_0 c \varphi c \varphi_0 c \psi c \theta_0 s \theta + w w_0 c \varphi c \varphi_0 c \psi_0 c \theta s \theta_0 - v w_0 c \varphi_0 c \psi c \theta_0 s \varphi s \theta + \\
& v w_0 c \varphi_0 c \psi_0 c \theta s \varphi s \theta_0 - v_0 w c \varphi c \psi c \theta_0 s \varphi_0 s \theta + v_0 w c \varphi c \psi_0 c \theta s \varphi_0 s \theta_0 - \\
& v v_0 c \psi c \theta_0 s \varphi s \varphi_0 s \theta + v v_0 c \psi_0 c \theta s \varphi s \varphi_0 s \theta_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_3 = & F_{z_0} \Delta x c \psi s \varphi + F_x \Delta y c \psi c \theta + F_{y_0} \Delta x c \varphi c \psi + F_{y_0} \Delta y c \varphi s \psi - F_x \Delta x c \theta s \psi + \\
& F_{z_0} \Delta y s \varphi s \psi + F_{z_0} \Delta y c \varphi c \psi s \theta - F_{z_0} \Delta x c \varphi s \psi s \theta - F_{y_0} \Delta y c \psi s \varphi s \theta + F_{y_0} \Delta x s \varphi s \psi s \theta + \\
& 2 \Delta x g c \varphi c \psi c \theta s \varphi + u v_0 c \varphi_0 c \psi c \psi_0 c \theta - u_0 v c \varphi c \psi c \psi_0 c \theta_0 + v v_0 c \varphi c \varphi_0 c \psi s \psi_0 - \\
& v v_0 c \varphi c \varphi_0 c \psi_0 s \psi + u w_0 c \psi c \psi_0 c \theta s \varphi_0 - u_0 w c \psi c \psi_0 c \theta_0 s \varphi - v w_0 c \varphi c \psi s \varphi_0 s \psi_0 - \\
& v w_0 c \varphi c \psi_0 s \varphi_0 s \psi + v_0 w c \varphi_0 c \psi s \varphi s \psi_0 + v_0 w c \varphi_0 c \psi_0 s \varphi s \psi + u u_0 c \psi c \theta c \theta_0 s \psi_0 - \\
& u u_0 c \psi_0 c \theta c \theta_0 s \psi + u v_0 c \varphi_0 c \theta s \psi s \psi_0 - u_0 v c \varphi c \theta_0 s \psi s \psi_0 - w w_0 c \psi s \varphi s \varphi_0 s \psi_0 + \\
& w w_0 c \psi_0 s \varphi s \varphi_0 s \psi - u w_0 c \theta s \varphi_0 s \psi s \psi_0 + u_0 w c \theta_0 s \varphi s \psi s \psi_0 - \\
& v w_0 c \varphi c \varphi_0 c \psi c \psi_0 s \theta_0 + v_0 w c \varphi c \varphi_0 c \psi c \psi_0 s \theta - v v_0 c \varphi c \psi c \psi_0 s \varphi_0 s \theta_0 + \\
& v v_0 c \varphi_0 c \psi c \psi_0 s \varphi s \theta + w w_0 c \varphi c \psi c \psi_0 s \varphi_0 s \theta - w w_0 c \varphi_0 c \psi c \psi_0 s \varphi s \theta_0 + \\
& u w_0 c \varphi_0 c \psi c \theta s \psi_0 s \theta_0 - u w_0 c \varphi_0 c \psi_0 c \theta s \psi s \theta_0 + u_0 w c \varphi c \psi c \theta_0 s \psi_0 s \theta - \\
& u_0 w c \varphi c \psi_0 c \theta_0 s \psi s \theta - v w_0 c \varphi c \varphi_0 s \psi s \psi_0 s \theta_0 + v w_0 c \psi c \psi_0 s \varphi s \varphi_0 s \theta + \\
& v_0 w c \varphi c \varphi_0 s \psi s \psi_0 s \theta - v_0 w c \psi c \psi_0 s \varphi s \varphi_0 s \theta_0 + u v_0 c \psi c \theta s \varphi_0 s \psi_0 s \theta_0 - \\
& u v_0 c \psi_0 c \theta s \varphi_0 s \psi s \theta_0 + u_0 v c \psi c \theta_0 s \varphi s \psi_0 s \theta - u_0 v c \psi_0 c \theta_0 s \varphi s \psi s \theta - \\
& v v_0 c \varphi s \varphi_0 s \psi s \psi_0 s \theta_0 + v v_0 c \varphi_0 s \varphi s \psi s \psi_0 s \theta - w w_0 c \varphi s \varphi_0 s \psi s \psi_0 s \theta + \\
& w w_0 c \varphi_0 s \varphi s \psi s \psi_0 s \theta_0 - v w_0 s \varphi s \varphi_0 s \psi s \psi_0 s \theta + v_0 w s \varphi s \varphi_0 s \psi s \psi_0 s \theta_0 + \\
& w w_0 c \varphi c \varphi_0 c \psi s \psi_0 s \theta s \theta_0 - w w_0 c \varphi c \varphi_0 c \psi_0 s \psi s \theta s \theta_0 + v w_0 c \varphi_0 c \psi s \varphi s \psi_0 s \theta s \theta_0 - \\
& v w_0 c \varphi_0 c \psi_0 s \varphi s \psi s \theta s \theta_0 + v_0 w c \varphi c \psi s \varphi_0 s \psi_0 s \theta s \theta_0 - v_0 w c \varphi c \psi_0 s \varphi_0 s \psi s \theta s \theta_0 + \\
& v v_0 c \psi s \varphi s \varphi_0 s \psi_0 s \theta s \theta_0 - v v_0 c \psi_0 s \varphi s \varphi_0 s \psi s \theta s \theta_0).
\end{aligned}$$

У формулах (18)-(19) використані скорочення: через  $c\varphi$  позначається  $\cos \varphi$ , через  $s\varphi$  позначається  $\sin \varphi$ , через  $c^2\varphi$  позначається  $\cos^2 \varphi$ . Для інших кутів скорочення мають аналогічний сенс.

Для обчислення величин у формулах (18)-(19) було використано специфічні функції Matlab: `sums`, що створює символічні змінні; `simplify`, яка спрощує різні типи символічних виразів; `cross`, яка обчислює векторний добуток двох векторів, зокрема у символічному вигляді. Код відповідного `m`-файла, за допомогою якого були отримані формули (18) і (19), наведено у [10].

Слідуючи [3], додамо у праву частину системи (17) функції  $\Delta$  і  $P$ , які відповідають за збурення та варіації параметрів системи таких, наприклад, як маса, момент інерції тощо. Отримаємо систему, яка робить нашу модель руху планерів більш відповідною реальності:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = G(I_3 + \Delta)\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{H} + \mathbf{P}, \quad (20)$$

де щодо функцій  $\Delta$  і  $P$  робляться такі припущення:

**Припущення 3.** *Припускається, що існують додатні числа  $\nu$  і  $\gamma$  такі, що на множині  $\mathcal{M}_\nu = \{\boldsymbol{\varepsilon} \mid \|\boldsymbol{\varepsilon}\| < \nu\}$  виконується нерівність:*

$$\|G\Delta G^{-1}\| \leq 1 - \nu. \quad (21)$$

На першому етапі побудови керування вектор кутової швидкості  $\boldsymbol{\Omega}$  розглядається у системі (17) як керування. І задача цього етапу полягає в тому, щоб знайти такий закон зміни  $\boldsymbol{\Omega}$ , який позначимо через  $\boldsymbol{\Omega}^d(p^d, q^d, r^d)$ , та відповідну компактну, інваріантну відносно  $t$  множину  $\Lambda \subset \mathcal{M}_\nu$  (тобто, така що усі розв'язки системи (20), які починаються в  $\Lambda$ , там і залишаються при всіх  $t \geq 0$ ), при яких  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , що задовольняє рівняння (20), прямувало би асимптотично до 0. При цьому компоненти керування  $\mathbf{u}_1$ , тобто величини  $\delta_a, \delta_e, \delta_r$  виконують роль збурень.

На другому етапі розглядається система  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = f(\boldsymbol{\Omega}) + C\mathbf{u}_1$  з (11), яка описує зміну вектора кутової швидкості  $\boldsymbol{\Omega}$ . Задача другого етапу полягає в тому, щоб побудувати такий закон зміни керування  $\mathbf{u}_1$ , який позначимо через  $\mathbf{u}_1^d = (\delta_a^d, \delta_e^d, \delta_r^d)$ , при якому компоненти  $\boldsymbol{\Omega}$ , тобто величини  $p, q, r$ , прямували би асимптотично до  $p^d, q^d, r^d$ .

Два етапи, описані вище, можна проілюструвати схемою на рис. 5.

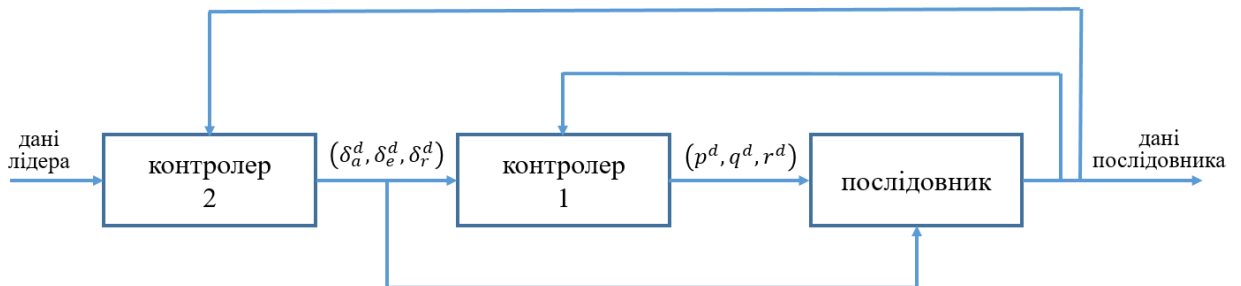


Рис. 5. Схема, яка ілюструє двоетапний процес побудови керування. Контролер 1 позначає синтез керування на першому етапі, а контролер 2 – синтез керування на другому етапі.

Fig. 5. Schematic illustrating the two-stage control designing process. Controller 1 denotes the control synthesis in the first stage, and controller 2 denotes the control synthesis in the second stage.

### 3.3. Побудова внутрішнього контуру керування

Далі описується побудова першого контролера. Побудова другого у даній статті не розглядається. Керування для першого контролера будемо синтезувати, виходячи з принципу керування ковзним режимом (sliding mode control principle), основи якого викладені у монографії [7] і статті [12], та використовуючи підхід, запропонований у роботі [3]. Відповідно до цього, синтез будемо виконувати у два кроки.

Перед тим, як розпочати перший крок, зробимо припущення.

**Припущення 4.** Планеру-послідовнику відомі значення усіх параметрів, які входять у матрицю  $G$  та вектор  $\mathbf{H}$ .

На першому кроці визначимо зворотній зв'язок  $\mathbf{\Omega}^d$  за формулою:

$$\mathbf{\Omega}^d = -G^{-1}(\mathbf{H} + \bar{\mathbf{\Omega}}^d), \quad (22)$$

де  $\bar{\mathbf{\Omega}}^d$  – нове керування, і застосуємо його до системи (20):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= -G(I_3 + \Delta)G^{-1}(\mathbf{H} + \bar{\mathbf{\Omega}}^d) + \mathbf{H} + \mathbf{P} = -(I_3 + G\Delta G^{-1})(\mathbf{H} + \bar{\mathbf{\Omega}}^d) + \mathbf{H} + \mathbf{P} \\ &= -\mathbf{H} - G\Delta G^{-1}\mathbf{H} - (I_3 + G\Delta G^{-1})\bar{\mathbf{\Omega}}^d + \mathbf{H} + \mathbf{P} \\ &= -G\Delta G^{-1}\mathbf{H} - (I_3 + G\Delta G^{-1})\bar{\mathbf{\Omega}}^d + \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо задачу про стабілізацію нульового стану рівноваги системи:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -G\Delta G^{-1}\mathbf{H} - (I_3 + G\Delta G^{-1})\bar{\mathbf{\Omega}}^d + \mathbf{P}. \quad (23)$$

На другому кроці, виходячи з принципу керування ковзним режимом, побудуємо керування  $\bar{\mathbf{\Omega}}^d$ , яке має розв'язати цю задачу. Для цього визначимо ковзну змінну  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t) + K \cdot \mathbf{d}(t), \quad (24)$$

де  $K \in R^{3 \times 3}$  – діагональна матриця з відмінними від 0 діагональними елементами  $k_1, k_2, k_3$ ;  $\mathbf{d}(t)$  – додаткова змінна, що є розв'язком задачі Коші:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{d}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t) \\ \mathbf{d}(0) = -K^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(0) \end{cases} \quad (25)$$

Тепер керування  $\bar{\mathbf{\Omega}}^d$  визначимо так:

$$\bar{\mathbf{\Omega}}^d = K\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \cdot \text{sign}(\mathbf{s}), \quad (26)$$

де функція  $\text{sign}(\mathbf{s})$  визначена так:  $\text{sign}(\mathbf{s}) = [\text{sign}(s_1), \text{sign}(s_2), \text{sign}(s_3)]^T$ ;  $\lambda$  – дійсний параметр, що визначається за формулою:

$$\lambda = \frac{\rho + \eta}{\gamma}, \quad (27)$$

з константою  $\eta > 0$  та  $\gamma \geq \max_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{M}_\gamma} \|G\Delta G^{-1}(\mathbf{H} - K\boldsymbol{\varepsilon})\| + \|\mathbf{P}\|$ . При цьому приймається наступна гіпотеза.

**Гіпотеза 1.** Для всіх значень змінних, від яких залежать елементи матриці  $G$ , що визначаються формулами (18), матриця  $G$  – невиврождена.

Наступна теорема доводить, що за певних умов існують такі значення матриці  $K$  та параметра  $\eta$ , при яких керування  $\mathbf{\Omega}^d$ , визначене формулами (22), (26), (27) з ковзною змінною, визначеною формулами (24)-(25), забезпечує асимптотичне прямування  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  до нуля.

**Теорема 1.** За Припущень 1-3 та Гіпотези 1 існує така матриця  $K$ , що керування, визначене формулами (22), (26) та (27), з ковзною змінною, визначеною формулами (24)-(25), забезпечує такий рух планера-послідовника, при якому асимптотично прямує до нуля величина  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ , яка є мірою відхилення вектора швидкості  $\mathbf{v}$  планера-послідовника від вектора  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r} = \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}$ .

*Доведення.* Розглянемо функцію  $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ , де  $\mathbf{s}$  визначена формулами (24)-(25), і знайдемо похідну  $V$  вздовж траєкторії системи (20), до якої застосовані вказані в умові теореми керування. Спочатку за формулою похідної складної функції отримаємо:

$$\dot{V}|_{(20)} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}}.$$

Далі враховуємо формулу (24):

$$\dot{V}|_{(20)} = \mathbf{s}^T (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + K\dot{\mathbf{d}}).$$

Використаємо формули (25), що визначають функцію  $\mathbf{d}$ :

$$\dot{V}|_{(20)} = \mathbf{s}^T (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + K\boldsymbol{\varepsilon}).$$

Оскільки похідна  $V$  обчислюється вздовж траєкторії системи (20), до якої застосовані вказані керування, то у одержаній формулі  $\dot{\epsilon}$  дорівнює правій частині системи (23), де  $\bar{\Omega}^d$  визначається формулою (26). Враховуючи це, одержимо далі:

$$\begin{aligned}\dot{V}|_{(20)} &= \mathbf{s}^T(-G\Delta G^{-1}\mathbf{H} - (I_3 + G\Delta G^{-1})\bar{\Omega}^d + \mathbf{P} + K\boldsymbol{\epsilon}) \\ &= \mathbf{s}^T(-G\Delta G^{-1}\mathbf{H} - \bar{\Omega}^d - G\Delta G^{-1}\bar{\Omega}^d + \mathbf{P} + K\boldsymbol{\epsilon}) \\ &= \mathbf{s}^T(-G\Delta G^{-1}\mathbf{H} - (K\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \cdot \text{sign}(\mathbf{s})) - G\Delta G^{-1}(K\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \cdot \text{sign}(\mathbf{s})) + \mathbf{P} + K\boldsymbol{\epsilon}) \\ &= -\lambda \mathbf{s}^T \cdot \text{sign}(\mathbf{s}) - \lambda \mathbf{s}^T G\Delta G^{-1} \cdot \text{sign}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}^T G\Delta G^{-1}(\mathbf{H} + K\boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{s}^T \mathbf{P}.\end{aligned}$$

Оцінимо окремо вираз  $\mathbf{s}^T \text{sign}(\mathbf{s})$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^T \text{sign}(\mathbf{s}) &= s_1 \cdot \text{sign}(s_1) + s_2 \cdot \text{sign}(s_2) + s_3 \cdot \text{sign}(s_3) \\ &= |s_1| + |s_2| + |s_3| \geq \sqrt{|s_1|^2 + |s_2|^2 + |s_3|^2} = \|\mathbf{s}\|.\end{aligned}$$

Враховуючи цю оцінку, отримаємо оцінку для  $\dot{V}|_{(20)}$ :

$$\begin{aligned}\dot{V}|_{(20)} &\leq -\lambda \cdot \|\mathbf{s}\| + \lambda \cdot \|G\Delta G^{-1}\| \cdot \|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{s}\| \cdot \|G\Delta G^{-1}(\mathbf{H} - K\boldsymbol{\epsilon})\| + \|\mathbf{s}\| \cdot \|\mathbf{P}\| = \\ &= -\lambda \cdot \|\mathbf{s}\| + \lambda \cdot \|G\Delta G^{-1}\| \cdot \|\mathbf{s}\| + (\|G\Delta G^{-1}(\mathbf{H} - K\boldsymbol{\epsilon})\| + \|\mathbf{P}\|) \cdot \|\mathbf{s}\|.\end{aligned}$$

Враховуючи Припущення 3 та формулу (27), одержимо далі:

$$\dot{V}|_{(20)} \leq -\lambda \cdot \|\mathbf{s}\| + \lambda(1 - \gamma) \cdot \|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{s}\| \cdot \rho = -\lambda\gamma\|\mathbf{s}\| + \rho\|\mathbf{s}\| = \left(-\frac{\rho+\eta}{\gamma}\gamma + \rho\right)\|\mathbf{s}\| = -\eta\|\mathbf{s}\|.$$

Отримана оцінка гарантує, що всі траєкторії системи (20) досягають поверхні ковзання.

Диференціюючи по  $t$  рівність (24) і враховуючи формулу (25), отримуємо рівняння, що описує ковзну динаміку:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(t) + K \cdot \boldsymbol{\epsilon}(t). \quad (28)$$

Для того, щоб отримати еквівалентне керування  $\bar{\Omega}_{eq}^d$  у ковзному режимі, необхідно покласти  $\dot{\mathbf{s}} = 0$  і з отриманого рівняння виразити керування. Враховуючи (28), рівняння  $\dot{\mathbf{s}} = 0$  можемо записати у вигляді:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(t) + K \cdot \boldsymbol{\epsilon}(t) = 0,$$

і далі, враховуючи (23), у вигляді:

$$-G\Delta G^{-1}\mathbf{H} - (I_3 + G\Delta G^{-1})\bar{\Omega}^d + \mathbf{P} + K \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0.$$

З отриманої рівності виражаємо  $\bar{\Omega}^d$ , яке і буде еквівалентним керуванням:

$$\bar{\Omega}_{eq}^d = (I_3 + G\Delta G^{-1})^{-1}(-G\Delta G^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{P} + K \cdot \boldsymbol{\epsilon}).$$

Підставляючи у (23) еквівалентне керування  $\bar{\Omega}_{eq}^d$ , отримаємо рівняння, яке описує динаміку замкнутої системи у ковзному режимі:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = -K \cdot \boldsymbol{\epsilon}. \quad (29)$$

Елементи матриці  $K$  вибираються таким чином, щоб розв'язок системи (29) був асимптотично стійким і множина  $\Lambda$  була позитивно-інваріантною відносно системи (23), тобто  $\boldsymbol{\epsilon}(t) \in \Lambda$  для будь-яких  $t \geq 0$ . Теорему доведено.

#### 4. Висновки

Стаття присвячена дослідженню системи, утвореної двома БПЛА планерного типу. Один з планерів є лідером, він рухається по траєкторії, на яку ми не можемо вплинути. Інший планер є послідовником, рух якого визначається керуваннями. Задача полягає в тому, щоб для послідовника побудувати таке керування, при якому послідовник слідував би за лідером. При цьому необхідно попередньо визначити умову слідування послідовника за лідером. В результаті проведеного дослідження:

- 1) Сформульовано умову слідування планера-послідовника за планером-лідером. Запропонована умова має вигляд (3).
- 2) Використовуючи принцип керування ковзним режимом, побудовано керування для планера-послідовника у вигляді закону зміни вектора його

кутової швидкості. Керування визначається формулами (22), (26), (27) з ковзною змінною, визначеною формулами (24), (25).

Дослідження може бути продовжене у декількох напрямках. Перший напрямок полягає у продовженні досліджень у рамках критерію слідування (3) і передбачає виконання таких кроків:

- перевірка Гіпотези 1 (доведення істинності або спростування).
- перевірка системи, яка описує зміну  $\Omega$ , на керованість. Тобто, необхідно встановити чи будь-яке значення  $\Omega_0$  вектора  $\Omega$  може бути досягнуте, враховуючи обмеженість компонент  $\delta_a, \delta_e$  та  $\delta_r$  керування  $u_1$ .
- побудова керування  $u_1$  другого етапу (зовнішній контур керування).
- побудова комп'ютерної симуляції до задачі.

Другий напрямок полягає у побудові керувань, які забезпечують виконання умови слідування, що альтернативна умові (3). В якості цієї альтернативної може бути розглянута умова прямування кутів Ейлера планера-послідовника до значень кутів Ейлера планера-лідера та кута між векторами  $r_0(t) - r(t)$  та  $V(t)$  до нуля, тобто:

$$\varphi(t) \rightarrow \varphi_0(t), \theta(t) \rightarrow \theta_0(t), \psi(t) \rightarrow \psi_0(t), \angle(r_0(t) - r(t), V(t)) \rightarrow 0, \quad (30)$$

при  $t \rightarrow \infty$ . При такій меті керування не потрібно робити Припущення 1 і 2, що знімає обмеження на рух планерів. Однак, така система може бути не керованою в тому сенсі, що кількість параметрів керування три (змінні  $\delta_a, \delta_e$  і  $\delta_r$ ), а змінних, якими треба керувати, більше – чотири (змінні  $\varphi, \theta, \psi$  та  $\sigma$ ). Але є гіпотеза, що кути  $\varphi, \theta, \psi$  та  $\sigma$  утворюють залежну (наприклад, лінійно) систему, а тому існують три такі кути, позначимо їх через  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , через які виражаються  $\varphi, \theta, \psi$  та  $\sigma$ . Якщо гіпотеза істинна, то умову (30) можна замінити на еквівалентну:

$$\rho_1(t) \rightarrow \bar{\rho}_1(t), \rho_2(t) \rightarrow \bar{\rho}_2(t), \rho_3(t) \rightarrow \bar{\rho}_3(t), \quad (31)$$

при  $t \rightarrow \infty$  ( $\bar{\rho}_1(t), \bar{\rho}_2(t), \bar{\rho}_3(t)$  – відомі функції або константи), що означає, що змінних, якими треба керувати, стільки ж, стільки і параметрів керування. Таким чином, в подальшому актуально підтвердити чи спростувати згадану гіпотезу, і у випадку її істинності побудувати керування, яке забезпечує виконання умови (31).

#### Список використаної літератури:

1. РФ застосувала проти України нові плануючі 1500-кг бомби УПАБ-1500В: нова й доволі вагома загроза // Defence Express : веб-сайт. URL: [https://defence-ua.com/weapon\\_and\\_tech/rf\\_zastosovala\\_proti\\_ukrajini\\_novi\\_planujuchi\\_1500\\_kg\\_bombi\\_upab\\_1500v\\_nova\\_j\\_dovoli\\_vagoma\\_zagroza-10836.html](https://defence-ua.com/weapon_and_tech/rf_zastosovala_proti_ukrajini_novi_planujuchi_1500_kg_bombi_upab_1500v_nova_j_dovoli_vagoma_zagroza-10836.html) (дата звернення: 10.08.2023).
2. Attallah A. S. Attitude control of gliding bomb using classical PID and modified PI-D controllers / A. S. Attallah, A. T. Hafez, G. A. EL-Sheikh, A. S. Mohammady // *Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST)*. – 2016. – Vol. 55. – P. 4451-4456.
3. Defoort M. Sliding-mode formation control for cooperative autonomous mobile robots / M. Defoort, T. Floquet, A. Kokosy, W. Perruquetti // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. – 2008. – Vol. 55, № 11. – P. 3944-3953. Retrieved from <https://doi.org/10.1109/TIE.2008.2002717>
4. Elandy I. H. Modeling and simulation of an aerial gliding body in free-fall / A. N. Ouda, A. M. Kamel, Y. Z. Elhalwagy // *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*. – 2018. – Vol. 7. – P. 135-142.
5. Geng L. Application of Maximum Principle with Final State Constraints in Gliding Control for Guided Bombs / L. Geng, Z. Zheng // *2007 IEEE International Conference on Automation and Logistics*. – 2007. – P. 205-209. Ружим доступу: <https://doi.org/10.1109/ICAL.2007.4338557>

6. Ground Launched Small Diameter Bomb // Wikipedia : веб-сайт. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Ground\\_Launched\\_Small\\_Diameter\\_Bomb](https://en.wikipedia.org/wiki/Ground_Launched_Small_Diameter_Bomb) (дата звернення: 20.11.2023).
7. Khalil H. K. Nonlinear systems. Third edition // Department of Electrical and Computer Engineering Michigan State University. – 2002.
8. Liang Z. Trajectory planning for cooperative flight of two hypersonic entry vehicles / Z. Liang, J. Yu, Z. Ren, Q. Li // In *21st AIAA International Space Planes and Hypersonics Technologies Conference*. – 2017. – P. 2251 Ружим доступу: <https://doi.org/10.2514/6.2017-2251>
9. Lim S. Guidance to control arrival angle and altitude for an unpowered aerial vehicle / S. Lim, S. Cho, E. Lee // *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*. – 2020. – Vol. 21, № 1. – P. 1-28. Ружим доступу: <https://doi.org/10.1007/s42405-020-00265-8>
10. Mohamed M. I. Modeling, simulation and attitude control of an aerial gliding vehicle / M. I. Mohamed, E. Safwat, A. M. Kamel // 13th International Conference on Electrical Engineering ICEENG. – 2022. – P. 23-26. Ружим доступу: <https://doi.org/10.1109/ICEENG49683.2022.9782063>
11. Sliding Mode Control // MathWorks : веб-сайт. URL: [https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/design-sliding-mode-control-reaching-law.html?searchHighlight=sliding%20mode%20control&s\\_tid=srchtitle\\_support\\_results\\_3\\_sliding%2520mode%2520control](https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/design-sliding-mode-control-reaching-law.html?searchHighlight=sliding%20mode%20control&s_tid=srchtitle_support_results_3_sliding%2520mode%2520control) (дата звернення: 07.07.2023).
12. Wang X. Three-dimensional cooperative guidance and control law for multiple reentry missiles with time-varying velocities / X. Wang, Y. Zhang, D. Liu, M. He // *Aerospace Science and Technology*. – 2018. – Vol. 80. – P. 127-143. Ружим доступу: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.07.011>
13. Zhang Y. A globally fixed-time solution of distributed formation control for multiple hypersonic gliding vehicles / Y. A. Zhang, X. Wang, S. Tang // *Aerospace Science and Technology*. – 2020. – Vol. 98, № 5. – 105643. Ружим доступу: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105643>

#### References:

1. RF zastosovala proty Ukrainy novi planuiuchi 1500-kh bomby UPAB-1500V: nova y dovoli vahoma zahroza // Defence Express : veb-sait. URL: [https://defence-ua.com/weapon\\_and\\_tech/rf\\_zastosovala\\_proti\\_ukrajini\\_novi\\_planujuchi\\_1500\\_kg\\_bombi\\_upab\\_1500v\\_nova\\_j\\_dovoli\\_vagoma\\_zagroza-10836.html](https://defence-ua.com/weapon_and_tech/rf_zastosovala_proti_ukrajini_novi_planujuchi_1500_kg_bombi_upab_1500v_nova_j_dovoli_vagoma_zagroza-10836.html) (date of application: 10.08.2023).
2. Attallah, A. S., Hafez, A. T., EL-Sheikh, G. A., & Mohammady, A. S. (2016). Attitude control of gliding bomb using classical PID and modified PI-D controllers. *differential equations, I*, 10.
3. Defoort, M., Floquet, T., Kokosy, A., & Perruquetti, W. (2008). Sliding-mode formation control for cooperative autonomous mobile robots. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(11), 3944-3953. Retrieved from <https://doi.org/10.1109/TIE.2008.2002717>
4. Elandy, I. H., Ouda, A. N., Kamel, A. M., & Elhalwagy, Y. Z. (2018). Modeling and simulation of an aerial gliding body in free-fall. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, ISSN, 2278-0181.
5. Geng, L., & Zheng, Z. (2007, August). Application of Maximum Principle with Final State Constraints in Gliding Control for Guided Bombs. In *2007 IEEE International Conference on Automation and Logistics* (pp. 205-209). IEEE. Retrieved from <https://doi.org/10.1109/ICAL.2007.4338557>

6. Ground Launched Small Diameter Bomb // Wikipediia : veb-sait. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Ground\\_Launched\\_Small\\_Diameter\\_Bomb](https://en.wikipedia.org/wiki/Ground_Launched_Small_Diameter_Bomb) (date of application: 20.11.2023).
7. Khalil, H. K. (2002). Nonlinear systems third edition.(2002).
8. Liang, Z., Yu, J., Ren, Z., & Li, Q. (2017). Trajectory planning for cooperative flight of two hypersonic entry vehicles. In *21st AIAA International Space Planes and Hypersonics Technologies Conference* (p. 2251). Retrieved from <https://doi.org/10.2514/6.2017-2251>
9. Lim, S., Cho, S., & Lee, E. (2020). Guidance to control arrival angle and altitude for an unpowered aerial vehicle. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 1-28. mag.m. Retrieved from <https://doi.org/10.1007/s42405-020-00265-8>
10. Mohamed, M. I., Safwat, E., & Kamel, A. M. (2022, March). Modeling, simulation and attitude control of an aerial gliding vehicle. In *2022 13th International Conference on Electrical Engineering (ICEENG)* (pp. 23-26). IEEE. Retrieved from <https://doi.org/10.1109/ICEENG49683.2022.9782063>
11. Sliding Mode Control // MathWorks : veb-sait. URL: [https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/design-sliding-mode-control-reaching-law.html?searchHighlight=sliding%20mode%20control&s\\_tid=srchtitle\\_support\\_result\\_s\\_3\\_sliding%2520mode%2520control](https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/design-sliding-mode-control-reaching-law.html?searchHighlight=sliding%20mode%20control&s_tid=srchtitle_support_result_s_3_sliding%2520mode%2520control) (date of application: 07.07.2023).
12. Wang, X., Zhang, Y., Liu, D., & He, M. (2018). Three-dimensional cooperative guidance and control law for multiple reentry missiles with time-varying velocities. *Aerospace Science and Technology*, 80, 127-143. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.07.011>
13. Zhang, Y., Wang, X., & Tang, S. (2020). A globally fixed-time solution of distributed formation control for multiple hypersonic gliding vehicles. *Aerospace Science and Technology*, 98, 105643. Retrieved from <https://doi.org/10.1109/ICAL.2007.4338557>

S. V. BABENKO

Ph.D., senior lecturer, Bohdan Khmelnytsky National University Of Cherkasy,  
Cherkasy, Ukraine,  
[differenceeq@vu.cdu.edu.ua](mailto:differenceeq@vu.cdu.edu.ua)

A. V. HONCHARENKO

Master's student, Bohdan Khmelnytsky National University Of Cherkasy, Cherkasy,  
Ukraine,  
[honcharenko.anna1619@vu.cdu.edu.ua](mailto:honcharenko.anna1619@vu.cdu.edu.ua)

### **“LEADER-FOLLOWER TRACKING CONTROL FOR GLIDING UAVs SYSTEM”**

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-3-20

PACS: 89.20.Bb, 07.90+c

In the paper a system formed by two glider-type UAVs is considered. Guided bombs are examples of such UAVs (for example, the GBU bomb manufactured by Boeing). The specificity of glider UAVs is that they fly not with the help of engines, as rockets, airplanes or helicopters do, but exclusively under the action of gravity and aerodynamic forces caused by the geometry of the object (the presence of wings).

One of the system gliders plays the role of a leader, that is, it is controlled automatically according to a given algorithm or it is controlled by an operator. It is assumed that the leader's

task is to hit a specific target on Earth. The second glider of the system is a follower, for which it is possible to build automatic control. The task is to find such control for the follower, with the help of which it would track the leader in such a way as to hit the target that the leader is oriented towards. To find such control, the condition for tracking the leader by the follower is formulated in the first part of the paper. Namely, tracking the leader means such movement of the follower, in which at least one of the following conditions is met: 1) the velocity vector  $\mathbf{V}$  of the follower and the vector  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$  ( $\mathbf{r}_0$  and  $\mathbf{r}$  denote the radius vectors of the leader's and follower's centers of mass, respectively) are co-directed, 2) the positions of the follower and the leader coincide. In the second part of the paper, based on the differential equations of motion, an equation for the error is derived, which is taken to be the vector product of the vectors  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$  and  $\mathbf{V}$ . It is shown that under certain assumptions, the error is equal to zero if and only if the follower tracks the leader. Based on the equations for the error, using the principle of sliding mode control, a control for the follower glider is constructed in the form of a law of change of its angular velocity vector.

**Keywords:** gliding UAV, leader-follower tracking, control, sliding mode, Matlab.

*Одержано редакцією 23.09.2024*

*Прийнято до друку 01.11.2024*