ORCID: 0000-0002-6284-1193

О. А. ЯРОВА

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь,
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
oksana.yarova@lnu.edu.ua

DOI:10.31651/2076-5851-2025-3-10 PACS: 02.50.-r, 02.50.Ey, 02.50.Cw.

АСИМПТОТИКА СУМІШІ БАГАТОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ВІДНОВЛЕННЯ В НЕЛІНІЙНОМУ НОРМУВАННІ

Стаття присвячена дослідженню багатовимірних рівнянь відновлення, які виникають у контексті аналізу випадкових процесів та застосовуються в задачах математичної статистики, теорії надійності, економіки, фізики складних систем тощо. Розглядається підхід, за якого дослідження цих рівнянь проводиться в умовах нелінійної апроксимації. Основна ідея полягає у нормуванні часу за допомогою нескінченно малого нелінійного множника при певному параметрі, що прямує до нуля $g(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Така зміна масштабу дозволяє істотно розширити область дослідження та більш точно описати динаміку процесів, зокрема фіксувати короткотривалі зміни, стрибки та переходи між станами.*

Рівняння відновлення формулюються в матричному вигляді, що дає змогу врахувати структуру взаємозв'язків між компонентами векторного процесу. Розглядаються випадки, коли процеси мають марковську природу або складаються з незалежних приростів. У цьому контексті важливою є побудова моделі, яка є сумішшю двох багатовимірних рівнянь відновлення. Для кожного з них виписано всі необхідні умови існування та коректності, задано відповідні ймовірності реалізації, визначено функції відновлення та побудовано ймовірнісну модель.

Окрема увага приділена отриманню розв'язків рівнянь у термінах умовного математичного сподівання, що дозволяє встановити зв'язок між розв'язками рівнянь та характеристиками відповідних процесів. У результаті дослідження для розглянутої суміші знайдено граничне представлення за умов слабкої збіжності при малому параметрі. Це дозволяє сформулювати та довести граничну теорему, яка описує поведінку суміші багатовимірних рівнянь відновлення з нелінійними нормуючими множниками у асимптотичному режимі.

Ключові слова: багатовимірне рівняння відновлення, процес Маркова, суміш, нелінійне нормування, слабка збіжність, процес з незалежними приростами.

1. Вступ

Багатовимірні рівняння відновлення є ключовим інструментом у моделюванні складних стохастичних систем, де процеси оновлення залежать від векторної історії розвитку системи. Вони виникають у теорії випадкових еволюцій, математичній біології, теорії обслуговування, економічному прогнозуванні та інших галузях прикладної ймовірності. У класичному підході дослідження таких рівнянь здійснюється в лінійному масштабі часу, однак це не дозволяє повною мірою враховувати швидкоплинні явища, стрибки або мікроструктурні зміни. У зв'язку з цим зростає інтерес до вивчення рівнянь

відновлення в нелінійній апроксимації, коли час масштабується за допомогою нескінченно малого нелінійного множника.

Крім того, у багатьох прикладних задачах природно виникає ситуація, коли поведінка системи описується не єдиним рівнянням, а сумішшю кількох рівнянь відновлення, кожне з яких діє з певною ймовірністю. Такі моделі краще відображають випадкову змінність середовища або перемикання між динаміками різного типу. Постає задача побудови та дослідження відповідної ймовірнісної моделі, а також встановлення її граничних властивостей при асимптотичному переході.

Різні аспекти теорії рівнянь відновлення розглядались у низці класичних та сучасних робіт. Класичний підхід до доведення теорем відновлення представлений у праці В. Феллера [5], а загальна теорія стохастичних систем у фазових просторах зі злиттям наведена в монографії [6].

У роботах [1, 2] досліджено асимптотику скалярних та багатовимірних рівнянь відновлення в умовах нелінійного масштабування часу. Зокрема, у [2] запропоновано підхід до нелінійної апроксимації та отримано точну формулу для нормуючого множника. У статті [1] сформульовано і доведено граничну теорему для багатовимірного рівняння відновлення. У працях [3, 4] досліджено матричні випадкові еволюції та встановлено асимптотичні властивості їхніх розв'язків.

Незважаючи на наявні результати, питання побудови та дослідження сумішей багатовимірних рівнянь відновлення, особливо в нелінійній апроксимації, залишається відкритим. Зокрема, відсутні повні граничні теореми для таких моделей при слабкій збіжності.

Метою цієї статті є побудова та дослідження моделі, яка представляє собою суміш двох багатовимірних рівнянь відновлення з нелінійними нормуючими множниками.

2. Багатовимірні рівняння відновлення

Розглянемо наступні рівняння відновлення в матричній формі

$$X_1^{\varepsilon}(t) = A_1^{\varepsilon}(t) + \int_0^t F_1^{\varepsilon}(du) X_1^{\varepsilon}(t-u)$$

та

$$X_2^{\varepsilon}(t) = A_2^{\varepsilon}(t) + \int_0^t F_2^{\varepsilon}(du) X_2^{\varepsilon}(t-u),$$

де $t \geq 0,\ \varepsilon > 0,\ X_1^{\varepsilon}(t), A_1^{\varepsilon}(t), X_2^{\varepsilon}(t), A_2^{\varepsilon}(t)$ - сім'ї невід'ємних матричнозначних функцій, $F_1^{\varepsilon}(dt), F_2^{\varepsilon}(dt)$ - сім'ї заданих невід'ємних матричнозначних мір. Основним припущенням до даної функції є слабка збіжність $F_1^{\varepsilon}(dt)$ до $F_1(dt)$ і $F_2^{\varepsilon}(dt)$ до $F_2(dt)$ при $\varepsilon \to 0$. Причому, матриці $F_1(dt)$ та $F_2(dt)$ - розкладні, блочно-діагонального вигляду.

Функції $F_1^{\varepsilon}(dt)$ і $F_2^{\varepsilon}(dt)$ можуть бути представлені в наступному вигляді

$$F_1^{\varepsilon} = F_1 + g_1(\varepsilon)B_1 + g_2(\varepsilon)B_1^2 + \ldots + g_n(\varepsilon)B_1^n + o(g_n(\varepsilon)),$$

$$F_2^{\varepsilon} = F_2 + g_1(\varepsilon)B_2 + g_2(\varepsilon)B_2^2 + \ldots + g_n(\varepsilon)B_2^n + o(g_n(\varepsilon)),$$

де $B_1, \ldots, B_1^n, B_2, \ldots, B_2^n$ - матриці, $g_1(\varepsilon) \to 0, \ldots, g_n(\varepsilon) \to 0,$ при $\varepsilon \to 0.$

Введемо ще одну функцію

$$L_{ij}^{\varepsilon} = F_{ij}^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{n \in E_k \setminus w_k} F_{in}(\varepsilon) \cdot L_{nj}(\varepsilon),$$

$w_1 \in E_1, ..., w_r \in E_r$ - деякі фіксовані індекси, причому $E_1, ..., E_r$ - неперетинні множини.

Функція $L^{\varepsilon}(t)$ слабо збігається до функції $L(t)$, при $\varepsilon \to 0$.

Крім цього, $L_{ij} = L_{ij}(\infty) = 0$, $i \in E_s$, $j \in E_k, s \neq k$.

$$L_{ij} = F_{ij} + \sum_{n \in E_s \setminus w_k} F_{in} \cdot L_{nj.}$$

Позначимо наступні функції

$$\pi_{s(1)} = \sum_{i,j \in E_s} p_{i(1)}^{(s)} \cdot a_{ij,}$$

$$\pi_{s(2)} = \sum_{i,j \in E_s} p_{i(2)}^{(s)} \cdot a_{ij,}$$

де $p_{(1)}^{s}$ та $p_{(2)}^{s}$ - ліві власні вектори матриць F_1^s та F_2^s відповідно.

Нехай $X_1^{\varepsilon}(t)$ та $X_2^{\varepsilon}(t)$ - сім'ї марковських процесів з неперервним часом та скінченною кількістю станів $1,2,..,n$. $X_1^{\varepsilon}(t) \to X_1(t)$, $X_2^{\varepsilon}(t) \to X_2(t)$, при $\varepsilon \to 0$.

Нехай $\xi_i^{\varepsilon}(t)$ - процес з незалежними приростами, $t \geq 0$, $\xi_i^{\varepsilon}(t) > 0$, $i = 1,2,..,n$.

Розглянемо наступний процес

$$\zeta^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \xi_{i(1)}^{\varepsilon}(t), & при \quad t < \tau, \quad X_l^{\varepsilon}(0) = i \\ \xi_{i(1)}^{\varepsilon}(\tau) + \xi_{j(2)}^{\varepsilon}(t-\tau), & при \quad \tau \leq t < \tau_1 \quad X_l^{\varepsilon}(\tau) = j \\ \xi_{i(1)}^{\varepsilon}(\tau) + \xi_{j(2)}^{\varepsilon}(t-\tau) + \xi_{s(3)}^{\varepsilon}(t-\tau_1), & при \quad \tau_1 \leq t < \tau_2 \quad X_l^{\varepsilon}(\tau_1) = s \\ ..... \end{cases}$$

де $l = 1,2.$

Для даного процесу, багатовимірне рівняння відновлення має наступний вигляд

$$E_{i(l)}(e^{-\lambda\zeta^{\varepsilon}(t)}) = E_i(e^{-\lambda\xi_i^{\varepsilon}(t)}) \cdot P\{\tau < t \mid X_l^{\varepsilon}(0) = i\} + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t (E_i(e^{-\lambda\zeta^{\varepsilon}(u)})) p_{ij(l)}(du) \cdot E_j(e^{-\lambda\zeta^{\varepsilon}(t-u)})$$

та виконуються наступні умови

1. $0 \leq E_i(e^{-\lambda\zeta^{\varepsilon}(u)}) p_{ij(l)}^{\varepsilon}(du) < \infty,$
2. $E_i(e^{-\lambda\zeta^{\varepsilon}(u)}) p_{ij(l)}^{\varepsilon}(du)$ - нерозкладна матриця,
3. Має місце слабка збіжність $E_i(e^{-\lambda\zeta^{\varepsilon}(u)}) p_{ij(l)}^{\varepsilon}(du) \to E_i(e^{-\lambda\zeta(u)}) p_{ij(l)}(du),$
4. $E_i(e^{-\lambda\zeta(u)}) p_{ij(l)}(du)$ - блочно розкладна матриця,
5. $E_i(e^{-\lambda\zeta(u)}) p_{ij(l)}(du)$ - рівномірно інтегровна.

Позначимо наступні функції відновлення

$$H_{ij(1)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = E_i\left(e^{-\lambda\zeta^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)}\right) p_{ij(1)}^{\varepsilon}(dt)$$

та

$$H_{ij(2)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = E_i\left(e^{-\lambda\zeta^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)}\right) p_{ij(2)}^{\varepsilon}(dt) .$$

Нехай функція $H_{ij(1)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$ зустрічається з ймовірністю p_1, а функція $H_{ij(2)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$ - з ймовірністю p_2, при чому $p_1+p_2=1.$ Тоді можна побудувати суміш в наступному вигляді

$$p_1\cdot H_{ij(1)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)+p_2\cdot H_{ij(2)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right).$$

Далі, знайдемо асимптотику граничного процесу при $g(\varepsilon)\to 0.$

3. Результати

Теорема. Нехай виконуються умови 1-5 та $\pi_{k(1)}\to\pi_k$, $\pi_{k(2)}\to\pi_k$.

Тоді

$$p_1\cdot H_{ij(1)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)+p_2\cdot H_{ij(2)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\left(\int_0^t e^{yC}dy\right)_{sk}\cdot\frac{p_{ij}^{(k)}}{\pi_k},$$

$g(\varepsilon)\to 0,$ при $\varepsilon\to 0.$

Доведення.

Позначимо

$$H_{ij}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)=p_1\cdot H_{ij(1)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)+p_2\cdot H_{ij(2)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)..$$

Досить довести, що

$$g(\varepsilon)H^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\left(\int_0^t e^{yC}dy\right)M^{-1}.$$

Матриця *M* визначається з наступного співвідношення

$$L^{\varepsilon}(\infty)=I+g(\varepsilon)MC+o(g(\varepsilon)),\ \varepsilon\to 0.$$

Розглянемо наступне рівняння

$$dH^{\varepsilon}(t)=L^{\varepsilon}(dt)+\int_0^t L^{\varepsilon}(du)H^{\varepsilon}(t-u).$$

Покладемо

$$\hat{H}^{\varepsilon}(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dH^{\varepsilon}(t),\ \hat{L}^{\varepsilon}(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dL^{\varepsilon}(t),\ t\ge 0.$$

Скориставшись перетворенням Лапласа, отримаємо

$$\hat{H}^{\varepsilon}(\lambda)=\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda)+\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda)\hat{H}^{\varepsilon}(\lambda).$$

Звідси,

$$\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda)=(I-\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda))\hat{H}^{\varepsilon}(\lambda).$$

Таким чином,

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}d\left(g(\varepsilon)H^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right)=g(\varepsilon)\left(I-\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon))\right)^{-1}\cdot\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon).$$

Розглянемо праву частину даної рівності

$$\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon))=\int_0^{\infty}e^{-\lambda g(\varepsilon)t}L^{\varepsilon}(dt)=$$

$$= L^{\varepsilon}(\infty) - \lambda g(\varepsilon)\int_0^{\infty} tL^{\varepsilon}(dt) + \int_0^{\infty}(e^{-\lambda g(\varepsilon)t} - 1 + \lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt) =$$

$$= I + g(\varepsilon)MC + o(g(\varepsilon)) - \lambda g(\varepsilon)(M + o(1)) + \int_0^{\infty}(e^{-\lambda g(\varepsilon)t} - 1 + \lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt).$$

Розглянемо інтеграл

$$\int_0^{\infty}(e^{-\lambda g(\varepsilon)t} - 1 + \lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt).$$

Підінтегральна функція є неспадною та невід'ємною, тому

$$\int_0^{\infty}(e^{-\lambda g(\varepsilon)t} - 1 + \lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt) \geq 0.$$

Тоді

$$\int_0^{\infty}(e^{-\lambda g(\varepsilon)t} - 1 + \lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt) = \int_0^{T}(e^{-\lambda g(\varepsilon)t} - 1 + \lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt) +$$

$$+ \int_T^{\infty}(e^{-\lambda g(\varepsilon)t} - 1 + \lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt) \leq$$

$$\leq (e^{-\lambda g(\varepsilon)T} - 1 + \lambda g(\varepsilon)T)L^{\varepsilon}(\infty) + \lambda g(\varepsilon)\int_T^{\infty} tL^{\varepsilon}(dt).$$

Таким чином,

$$0 \leq \frac{1}{g(\varepsilon)}\int_0^{\infty}(e^{-\lambda g(\varepsilon)t} - 1 + \lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt) \leq$$

$$\leq \left(\lambda T - \frac{1 - e^{-\lambda g(\varepsilon)T}}{g(\varepsilon)}\right)L^{\varepsilon}(\infty) + \lambda\int_T^{\infty} tL^{\varepsilon}(dt).$$

В результаті, отримаємо вираз

$$\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon)) = I - g(\varepsilon)\left[M(\lambda I - C) + o(1)\right],$$

де $o(1) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Розглянемо наступне співвідношення

$$g(\varepsilon)\left(I - \hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon))\right)^{-1} = \left[M(\lambda I - C) + o(1)\right]^{-1}.$$

Тоді

$$g(\varepsilon)\left(I - \hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon))\right)^{-1} \cdot \hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon) = \left[M(\lambda I - C) + o(1)\right]^{-1} - g(\varepsilon).$$

Перейдемо до границі у співвідношені

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d\left(g(\varepsilon)H^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right) = g(\varepsilon)\left(I - \hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon))\right)^{-1} \cdot \hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon)).$$

В результаті, отримаємо

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d\left(g(\varepsilon)H^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} (\lambda I - C)^{-1} \cdot M^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d\left[\int_0^{t} e^{yC} dy \cdot M^{-1}\right].$$

Згідно з теоремою неперервності для перетворень Лапласа

$$g(\varepsilon)H^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \left(\int_0^{t} e^{yC} dy\right)M^{-1}.$$

Врахувавши, що

$$H_{ij}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)=p_1\cdot H_{ij(1)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)+p_2\cdot H_{ij(2)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right).$$

остаточно отримуємо твердження теореми

$$g(\varepsilon)E_i\left(e^{-\lambda\zeta^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)}\right)p_{ij}^{\varepsilon}(dt)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\left(\int_0^t e^{yC}dy\right)_{sk}\cdot\frac{p_{ij}^{(k)}}{\pi_k}.$$

Теорему доведено.

Таким чином, отримано граничну теорему для суміші багатовимірних рівнянь відновлення.

4. Висновки

У даній статті досліджено модель, що є сумішшю двох багатовимірних рівнянь відновлення, які розглядаються в умовах нелінійної апроксимації. Такий підхід дозволив врахувати складні особливості динаміки стохастичних процесів, зокрема випадки з перемиканням між різними типами відновлення та наявністю стрибків.

Основним результатом дослідження є граничне представлення розв'язків при слабкій збіжності процесів у випадку, коли нормуючий множник прямує до нуля. Отримана гранична теорема узагальнює відомі результати для окремих рівнянь та розширює їх на випадок стохастично змішаних моделей у багатовимірному середовищі.

Результати цієї роботи можуть бути використані для подальшого аналізу стохастичних систем з перемиканнями, в задачах оптимального керування, обробки сигналів та моделювання складних процесів у випадкових середовищах. Напрямами подальших досліджень є узагальнення отриманих результатів на випадки з неперервним спектром параметрів, а також розгляд нелінійних рівнянь відновлення у просторі випадкових функцій.

Список використаної літератури:

1. Yarova O.A. Limit theorem for multidimensional renewal equation/ O.A. Yarova, Ya.I. Yeleyko// Cybernetics and System Analysis. – 2022. – Vol. 58, No. 1. P. 144-147. Режим доступу: https://doi.org/10.1007/s10559-022-00443-4
2. Yarova O.A. The renewal equation in nonlinear approximation/ O.A. Yarova, Ya.I. Yeleyko// Matematychni Studii – 2021. Vol. 56, No.1, p. 103-106. . Режим доступу: https://doi.org/10.30970/ms.56.1.103-106
3. Yeleyko Ya.I. A limit theorem for a matrix-valued evolution / Ya.I. Yeleyko, I.I. Nishchenko // Вісник ЛНУ, серія мех.-мат., 53 (1993), С. 102-107
4. Yeleyko Ya.I. On an asymptotic representation of the Perror root of a matrix-valued evolution / Ya.I. Yeleyko, I.I. Nishchenko // Ukrain. Mat. Zh. 48 (1996), No. 1, P. 35-43
5. Feller W. A simple proof for renewal theorems / W. Feller // Communs Pure and Appl. Math. No. 14 (1961), P. 285-293
6. Koroliuk V.S. Stochastic systems in merging phase space / V.S. Koroliuk, N. Limnios. – Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005. – 348 p.

References:

1. Yarova O.A. Limit theorem for multidimensional recovery equation / O.A. Yarova, Ya.I. Yeleiko // Cybernetics and system analysis. - 2022. - Vol. 58, No. 1. P. 144-147. Access mode: https://doi.org/10.1007/s10559-022-00443-4

2. Yarova O.A. Recovery equation in nonlinear approximation / O.A. Yarova, Ya.I. Yeleiko // Mathematical studies – 2021. Vol. 56, No. 1, p. 103-106. Access mode: https://doi.org/10.30970/ms.56.1.103-106
3. Yeleiko Y.I. Limit theorem for matrix-valued evolution / Ya.I. Yeleiko, I.I. Nishchenko // Bulletin of LNU, Mechanics-Mathematics series, 53 (1993), pp. 102-107
4. Yeleiko Ya.I. On the asymptotic representation of the root of the error of matrix-valued evolution / Ya.I. Yeleiko, I.I. Nishchenko // Ukr. Mat. Journal. 48 (1996), No. 1, pp. 35-43
5. Feller V. A simple proof of the restoration theorems / V. Feller // Communs Pure and Appl. Math. No. 14 (1961), pp. 285-293
6. Korolyuk V.S. Stochastic systems in a merging phase space / V.S. Korolyuk, N. Limnios. - Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005. - 348 p.

O. A. YAROVA
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Mathematical Statistics and Differential Equations,
Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine,
oksana.yarova@lnu.edu.ua

ASYMPTOTICS OF A MIXTURE OF MULTIDIMENSIONAL RENEWAL EQUATIONS UNDER NONLINEAR NORMALIZATION

DOI:10.31651/2076-5851-2025-3-10 PACS: 02.50.-r, 02.50.Ey, 02.50.Cw.

This paper is devoted to the study of multidimensional renewal equations that arise in the analysis of stochastic processes and have applications in mathematical statistics, reliability theory, economics, and complex physical systems. The focus is on the case where these equations are considered within a nonlinear approximation framework. The main idea involves time normalization by means of an infinitesimal nonlinear factor depending on a small parameter tending to zero. Such a rescaling significantly extends the domain of investigation and allows for a more accurate description of the process dynamics, particularly in detecting short-term changes, jumps, and state transitions.

The renewal equations are formulated in matrix form, which makes it possible to incorporate the internal structure and interrelations among the components of the vector-valued process. The study considers processes governed by Markovian dynamics as well as those with independent increments. Within this framework, a model is constructed as a mixture of two multidimensional renewal equations. For each of these components, all necessary conditions for solvability and consistency are provided, the probabilities of their occurrence are specified, and the corresponding renewal functions are defined.

Particular attention is given to the representation of the solutions to these equations in terms of conditional expectations, which reveals the connection between the asymptotic behavior of the process and the structure of the renewal equations. As a result, for the proposed mixture model, a limiting representation is obtained under the assumption of weak convergence as the small parameter tends to zero. This leads to the formulation and proof of a limit theorem

that describes the asymptotic behavior of the mixture of multidimensional renewal equations with nonlinear normalizing factors.

Keywords: multivariate renewal equation, Markov process, mixture, nonlinear normalization, weak convergence, process with independent increments.

Одержано редакцією 04.07.2025
Прийнято до друку 15.09.2025

Опубліковано 24.12.2025