ORCID: 0000-0002-1079-2852

Ю. КУДРИЧ
Молодший науковий співробітник,
Донецький національний університет імені Василя Стуса Вінниця, Україна,
ju.kudrych@donnu.edu.ua

ORCID: 0000-0002-1079-2852
М. ГРОНСЬКА
Магістр математики,
Донецький національний університет імені Василя Стуса Вінниця, Україна,
hronska.m@donnu.edu.ua

ORCID: 0000-0002-8434-1544

М. О. ПАСІЧНИЙ
кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри фізики,
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна,
pasichnyy@ukr.net

DOI: 10.31651/2076-5851-2025-58-66 PACS 02, 02.30, 02.60

ЯКІСНИЙ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ РІВНЯННЯ ЛАЗЕРНОГО ІМПУЛЬСУ

Дослідження рівняння лазерного імпульсу, а також початкових та початково-крайових (мішаних) задач для цього рівняння є доволі актуальною темою у дослідників, завдяки чисельним його застосуванням. Розвиток сучасних технологій дозволяють широко використовувати лазерні випромінювання в біологічних дослідженнях (лабораторні експерименти), медицині (лазерна хірургія, лазерна терапія) та косметології, промисловості (технології різання, зварювання, фарбування, тощо), в комерційній діяльності, системах передачі інформації. Варто відмітити розширення застосування лазерних випромінювань в сучасних технологіях зв'язку. Завдяки тому, що лазер здатен переносити набагато більше інформації, ніж радіохвилі, лазерні технології виходять зараз на перше місце, по зрівнянню з радіотехнікою. Водночас, на даний момент лазерні імпульси досліджуються здебільшого чисельними методами. Це пов'язано з тим, що отримати явний аналітичний розв'язок в деяких випадках є доволі складною задачею. Однак, явний аналітичний розв'язок дозволяє досліджувати багато якісних властивостей, що є доволі цінним в плані розвитку математичної теорії лазерного випромінювання. В поданій роботі з використання методу Фур'є, ми отримуємо явний аналітичний розв'язок першої мішаної задачі для рівняння лазерного імпульсу четвертого порядку. Одним з дієвих інструментів для дослідження якісних властивостей розв'язків крайових задач в математичної фізиці є також принцип максимуму. Проблема полягає в тому, що в класичній теорії математичної фізики принцип максимуму добре вивчений саме для параболічних та еліптичних рівнянь. Рівняння лазерного імпульсу, яке досліджується в даній роботі, є рівнянням гіперболічного типу, для яких принцип максимуму не існує в класичному формулюванні, крім того, це є рівняння високого, четвертого порядку. Всі ці нюанси роблять поставлену в даній роботі задачу актуальною як з математичної точки зору, що

дозволяє збільшити теоретичні наробки в даній проблематиці, так і з точки зору подальших застосувань лазерних технологій в різних галузях.

Об'єкт дослідження гіперболічні рівняння четвертого порядку на площині, рівняння лазерного імпульсу, мішана задача.

Предмет дослідження: принцип максимуму, якісні властивості, аналітичний розв'язок.

Мета роботи: Розвиток аналітичного підходу до розв'язання мішаної задачі для рівняння лазерного імпульсу, дослідження якісних властивостей класичних розв'язків за допомогою принципу максимуму для рівнянь четвертого порядку гіперболічного типу. Аналіз чисельних методів дослідження лазерних імпульсів.

Науковою новизною роботи є доведення принципу максимуму для рівняння лазерного імпульсу, отримання явного аналітичного розв'язку мішаної задачі для рівняння лазерного імпульсу. Наведено також фізичні моделі та їх аналіз, які приводять до рівняння лазерного імпульсу.

Ключові слова: рівняння в частинних похідних четвертого порядку, гіперболічні рівняння четвертого порядку, рівняння лазерного імпульсу, мішана задача, метод Фур'є.

1. Вступ

Рівняння лазерного імпульсу є важливим інструментом для подальшого вивчення математичної фізики в області термопружності, лазерної динаміки. Дослідження таких рівнянь чисельними методами було здійснено W. Nowacki [6]. Але ця робота має один суттєвий недолік – класичні формулювання призводять до рівняння припускаючи нескінченну швидкість тепла. Зрозуміло, що таке припущення йде в розріз з законами фізики тому для вирішення цього недоліку були проведені дослідження, щоб в той чи інший спосіб обійти цей ньюанс. R. B. Hetnarski та J. Ignaczak [4] вивчали узагальнені теорії на жорстке термопружне тіло в напівпросторі під впливом плоского джерела тепла і короткого лазерного пульсу. Саме це рівняння лазерного пульсу дослідженно в цій роботі аналітичним методом.

В роботі представлені допоміжні результати, які будуть використані при отримання основних результатів роботи, поставлено та розв'язано мішану задачу для рівняння лазерного імпульсу, отриманий його аналітичний розв'язок та проведений його якісний аналіз. Описані також відомі чисельні алгоритми для дослідження рівняння лазерного імпульсу, наведені також деякі результати щодо застосувань рівняння лазерного імпульсу при описі деяких фізичних процесів.

Одним з дієвих інструментів для дослідження якісних властивостей (єдиність та неперервна залежність розв'язку від початкових даних) розв'язків мішаних задач є принцип максимуму, який не потребує явного аналітичного вигляду розв'язку. Водночас, цей принцип добре відомий з курсу математичної фізики саме для рівнянь еліптичного та параболічного типів. Властивості єдиності та неперервної залежності розв'язку від початкових даних є важливим інструментом під час фізичної інтерпретації результатів. Ми розглянемо принцип максимуму для гіперболічних рівнянь четвертого порядку загального вигляду:

$$L[u] \equiv a_0 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} + a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} + a_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

а також рівнянь з молодшими членами третього порядку, що притаманно саме рівнянню лазерного імпульсу:

$$G[u] \equiv t_0 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + (1 - t_0 + \varepsilon t_0) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3},$$

де t_0, ε >0 сталі: $t_0 > 1, \varepsilon > 0, (1 + t_0 + \varepsilon t_0)^2 > 4t_0$.

Що стосується принципу максимуму для гіперболічних рівнянь, то він можливий лише в слабкому сенсі, в термінах оцінок. Так, в поданій роботі, слідуючи Mawhin J., Ortega R., Robles-Perez A. [5], ми використовуємо наступне означення слабкого принципу максимум для рівнянь гіперболічного типу:

Означення 1. [5] Нехай $L = Lu$ деякий лінійний диференціальний оператор, діючий на функціях $u : D \to R$, визначених на деякій допустимій [7] множині D. Нехай також ці функції належать деякій сім'ї B, яка складається з граничних, початкових, мішаних або будь-яких інших умов. Будемо казати, що оператор L задовольняє принципу максимуму в слабкому сенсі, якщо з умови

$$L \geq 0,\ u \in B,$$

випливатиме, що $u \geq 0$ в кожній точці області D.

2. Якісний аналіз рівняння лазерного імпульсу.

В цьому розділі отримано явний розв'язок мішаної задачі для рівняння лазерного імпульсу. Використовуючи принцип максимуму для гіперболічний рівнянь четвертого порядку [1], досліджено якісні властивості класичного розв'язку мішаної задачі для рівняння лазерного імпульсу.

В області $Q = \{0 < x < a, 0 < t < T\}$ розглянемо мішану задачу для рівняння четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке є математичною моделлю відгуку напівпростору на короткий лазерний імпульс, а саме, рівняння лазерного пульсу:

$$t_0 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + (1 - t_0 + \varepsilon t_0) \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$\left(1 + t^0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \theta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u, \tag{2}$$

$$u_{t^{(k)}}(x,0) = 0, k = 0,1,2,3, \qquad 0 \leq x \leq a\,, \tag{3}$$

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0, \ \ u(a,t) = u_{xx}(a,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$\theta(x,0) = 0 \ \ 0 \leq x \leq a.$$

Покладемо $\lambda_j = j\pi a^{-1}, j = 1, 2 \ldots$

З (1):

$$\int_0^a (Gu) \sin \lambda_j x dx = \int_0^a f(x,t) \sin \lambda_j x dx.$$

Розкладемо функції $u(x,t)$ та $f(x,t)$ в ряд Фур'є по системі $\sin \lambda_j x$: тоді, коефіцієнти розкладання матимуть вигляд:

$$u^j(t) = \int_0^a u(x,t) \sin \lambda_j x dx, \ \ f^j(t) = \int_0^a f(x,t) \sin \lambda_j x dx.$$

З рівняння (1) отримуємо рівняння для визначення коефіцієнтів функції $u(x,t)$:

$$t_0 u^j_{t^{(4)}} + u^j_{t^{(3)}} + (1 + t_0 + \varepsilon t^0)\lambda_j^2 u^j_{t^{(2)}} + (1+\varepsilon)\lambda_j^2 u^j_t + \lambda_j^4 u^j = f^j. \qquad (5)$$

І також з умов (3):

$$u^j_{t^{(k)}}(0) = 0, \ \ k = 0, 1, 2, 3.$$

Рівняння (5) – лінійне неоднорідне звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв'язок має вигляд:

$$u^j(t) = u^j_{\text{з.о.}}(t) + u^j_{\text{ч.н.}}(t)$$

$u^j_{\text{з.о.}}(t)$ − загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$u^j_{\text{з.о.}} = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} + c_3 e^{\mu_3 t} + c_4 e^{\mu_4 t},$$

де $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ − дійсні та різні корені характеристичного рівняння:

$$t_0 \mu_4 + \mu_3 + (1 + t_0 + \varepsilon t^0)\mu_2 + (1+\varepsilon){\lambda_j}^2 \mu_1 + {\lambda_j}^4 = 0.$$

Тоді

$$u^j(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} + c_3 e^{\mu_3 t} + c_4 e^{\mu_4 t} + \int_0^t k(s,t) f_j(s)\, ds.$$

Отже, аналітичний розв'язок рівняння лазерного імпульсу (1) має вигляд, з коефіцієнтами, які знаходяться з початково-крайових (мішаних) умов (3)-(4):

$$u(x,t) = \frac{2}{a}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} + c_3 e^{\mu_3 t} + c_4 e^{\mu_4 t} + \int_0^t k(s,t)\int_0^a f(x,s)\, sin\, \lambda_j\, x\, dx\, ds\right\} sin\, \lambda_j\, x \qquad (6)$$

Зауваження 1. З результатів роботи [2-3], відомо, що отриманий нами за формулою (6) явний аналітичний розв'язок мішаної задачі (1)-(4) є сильним розв'язком та належить простору $C^3(Q)$, за умови $f(x,t) \in C(Q)$. Зауважимо, що в роботі [2] , представлено інтегральне перетворення, яке показує існування неявного розв'язку з вказаного класу.

Таким чином, справедливе наступне твердження:

Теорема 1.

Нехай $f(x,t) \in C(Q)$. Тоді розв'язок мішаної задачі (1) – (4) існує, єдиний, належить простору $C^3(Q)$, та може бути поданий за допомогою формули (6).

З Теореми 1, а також принципу максимуму для гіперболічних рівнянь четвертого порядку (див. Означення 1 та результати роботи [1]), випливає наступне твердження, аналог принцип максимуму для сильних розв'язків мішаної задачі для рівняння лазерного імпульсу:

Теорема 2. (Слабкий принцип максимуму для сильних розв'язків мішаної задачі для рівняння лазерного імпульсу).

Нехай $f(x,t) \geq 0$ в прямокутнику $Q = \{0 < x < a, 0 < t < T\}$.

Тоді в кожній внутрішній точці $(x_0, t_0) \in E$, деякої підмножини прямокутника Q, матимемо: $u(x_0, t_0) \leq 0$.

3. Деякі підходи до чисельного аналізу рівняння лазерного імпульсу.

Зараз існує велика кількість програмних забезпечень які здатні підрахувати площу лазерного пульсу і його потужність, які є результатом чисельного аналізу рівняння лазерного імпульсу. Наприклад, розроблено чимало застосунків, які дозволяють врахувати площу цього лазера, імпульс, потужність за відомими початковими даними: діаметр, енергія імпульсу, ширина імпульсу, а також враховуючи простір в якому поширюється імпульс.

Одним із таких застосунків є, наприклад, сайт: www.gentec-eo.com. Це лише одна з багатьох програм, що використовує чисельні методи для розрахунку результату (див. рис. 1).

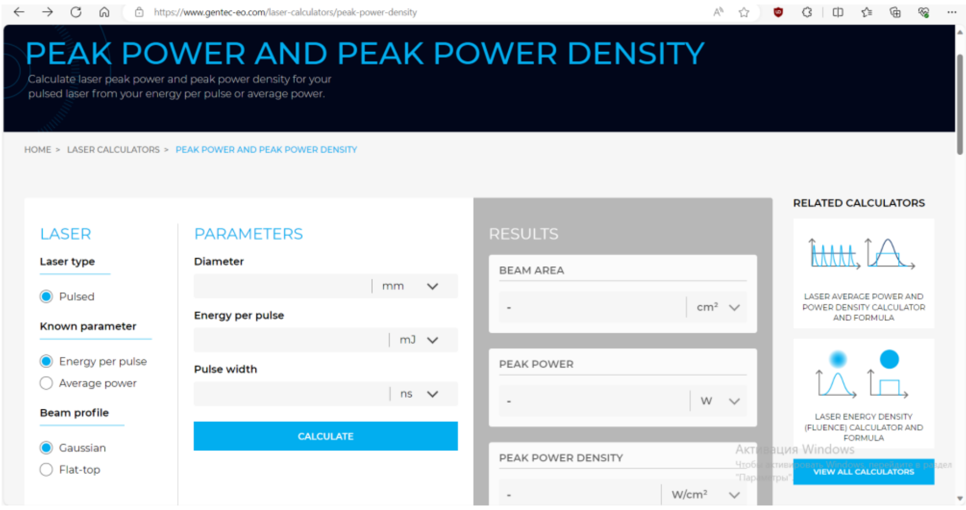

Рис. 1: Застосунок Gentec-eo для розрахунків потужності лазерного імпульсу (чисельне моделювання рівняння лазерного імпульсу.

Fig. 1: Gentec-eo application for calculating the power of laser pulse (numerical simulation of the laser pulse equation).

Калькулятор пікової потужності лазера. У лазері безперервної дії спостерігаються невеликі коливання, тобто, можна сказати, що мінімальна, середня і максимальна потужність лазера безперервної дії однакові. Мінімальна потужність зазвичай становить 0 Вт, а максимальна потужність досягає піку, коли інтенсивність досягає максимального значення. Щоб розрахувати пікову потужність лазерного променю, доводиться розділити енергію кожного імпульсу на тривалість імпульсу (також відому як ширина імпульсу). Тоді, щоб знайти пікову щільність потужності, потрібно лише розділити пікову потужність на площу поперечного перерізу променю на заданій відстані. Крім того, при відомій середній потужності лазера, можна знайти енергію імпульсу, розділивши її на частоту повторення. Щільність потужності лазера є величиною, яка впливає на реакцію матеріалу на неї. Звичайно, імпульсний лазер може пошкодити поверхню через накопичення повної енергії з часом, але це буде пов'язане з його середньою потужністю. Оскільки передача енергії не здійснюється безперервно, поверхня може бути пошкоджена під час кожного імпульсу. Це відбувається за умови, якщо енергія одного імпульсу виявиться занадто високою, щоб матеріал міг поглинути та розсіяти її, зберігаючи при цьому свою матеріальну цілісність. Таким чином, кожен імпульс може відривати частину поверхні.

Формули для пікової потужності і пікової щільності потужності. Ці формули описують поведінку гаусівського (теоретичного, ідеального) лазерного променю. У цьому випадку вони є апроксимацією значень, які можна отримати в реальних умовах. Крім того, існує декілька методів, які можна використовувати для вимірювання діаметра гаусового променю. Причина цього переважно пов'язана з тим, що його теоретичне значення досягає 0 тільки тоді, коли радіус досягає нескінченності. Отже, промінь матиме нескінченний діаметр. Наприклад, він задається за допомогою параметра $1/e^2$. У цей момент діаметр променю приблизно в 1699 рази перевищує повний діаметр, виміряний на половині максимуму функції Гауса. При $1/e^2$ це приблизно 86,5% від загальної потужності. Отже, для «площиних верхівок» гаусівського розподілу, формули використовуються без змін, але для класичного розподілу Гауса, існує коефіцієнт 2, на яку множать праву частину цих рівнянь (див. рис. 2).

Отже, щоб знайти пікову щільність променю достатньо енергію імпульсу розділити на добуток ширини імпульсу та площі променю, або ж середню потужність розділити на добуток частоти повторення, ширини імпульсу та площу променю.

Для знаходження пікової щільності треба енергію імпульсу розділити на ширину імпульсу, або ж середню потужність розділити на добуток частоти повторення та ширини імпульсу (див. рис. 2).

$$\overset{\text{Пікова щільність потужності}}{\text{Peak power density}}\left(\frac{W}{cm^2}\right) = \frac{\overset{\text{енергія імпульсу}}{\text{Energy per pulse}(J)}}{\underset{\text{ширина імпульсу}}{\text{Pulse width}(s)} \times \underset{\text{площа променя}}{\text{Beam area}(cm^2)}}$$

$$\overset{\text{Пікова щільність потужності}}{\text{Peak power density}}\left(\frac{W}{cm^2}\right) = \frac{\overset{\text{середня потужність}}{\text{Average power}(W)}}{\underset{\text{частота повторення}}{\text{Repetition rate}(Hz)} \times \underset{\text{ширина імпульсу}}{\text{Pulse width}(s)} \times \underset{\text{площа променя}}{\text{Beam area}(cm^2)}}$$

$$\overset{\text{Пікова щільність}}{\text{Peak power}(W)} = \frac{\overset{\text{енергія імпульсу}}{\text{Energy per pulse}(J)}}{\underset{\text{ширина імпульсу}}{\text{Pulse width}(s)}}$$

$$\overset{\text{Пікова щільність}}{\text{Peak power}(W)} = \frac{\overset{\text{середня потужність}}{\text{Average power}(W)}}{\underset{\text{частота повторення}}{\text{Repetition rate}(Hz)} \times \underset{\text{ширина імпульсу}}{\text{Pulse width}(s)}}$$

Рис. 2: Формули для пікової потужності і пікової щільності потужності лазерного імпульсу (з застосунку Gentec-eo).

Fig. 2: Peak power and peak power density of laser pulse (Gentec-eo application).

4. Висновки

В роботі отримано явний аналітичний розв'язок першої мішаної задачі для рівняння лазерного імпульсу четвертого порядку. Для дослідження якісних властивостей отриманого розв'язку використано один з дієвих інструментів математичної фізики-принцип максимуму. Рівняння лазерного імпульсу, яке досліджується в даній роботі, є рівнянням гіперболічного типу, для яких принцип максимуму не існує в класичному формулюванні, крім того, це є рівняння високого, четвертого порядку. Використовуючи результати роботи [1], доведена теорема існування та єдиності кластичного розв'язку мішаної задачі для рівняння лазерного імпульсу. Проведено також чисельний аналіз рівняння лазерного імпульсу за допомогою застосунку Gentec-eo. Всі ці нюанси роблять досліджену в даній роботі задачу актуальною як з математичної точки зору, так і з точки зору подальших застосувань лазерних технологій в різних галузях.

Подяки

Робота виконана в рамках програми 2025.06 "Наука для зміцнення обороноздатності і національної безпеки України" Національного фонду досліджень України (проєкт № 2025.06/0090, номер державної реєстрації 0125U003181).

Список використаної літератури:

1. Andreieva Yu., Buryachenko K. Qualitative analysis of fourth-order hyperbolic equations, Front. in Applied. Math. and Statistics, 2024. V.10. – режим доступу: https://doi.org/10.3389/fams.2024.1467199
2. Fichera, G. A. boundary value problem connected with response of semi-space to a short laser pulse. Rend Math Acc Lincei, 1997. 8(3), pp. 197 – 228. – режим доступу: https://eudml.org/doc/244317
3. Hector L. G., Hetnarski R. B., Thermal stress due to a laser pulse: Elastic solution., Journal of Applied Mechanics, 1996. 63(1), pp. 38 – 46. – режим доступу: https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-abstract/63/1/38/396423/Thermal-Stresses-due-to-a-Laser-Pulse-Elastic?redirectedFrom=fulltext
4. Hetnarskij R. B., Ignaczak J., Generalized thermoelasticity: response of semispace to a short laser pulse. Journal of Thermal Stresses, 1994. 17, pp. 377 – 396. – режим доступу: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/01495739.2018.1527616
5. Mawhin J., Ortega R., Robles-Perez A. Maximum principle for bounded solutions of the telegraph equation in 2- and 3-dim. and applications, Journal of Differential Equations, 2005. pp. 42–63. – режим доступу: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631073X02024068
6. Nowacki W. Some general theorems of thermo-piezoelectricity. Journal of Thermal Stresses, 1978, V.1, pp. 171 – 182. – режим доступу: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01495737808926940
7. Protter M., Weinberger H. Maximum principle in Differential Equations, Springer-Verlag New York. Inc., 1984. 261 p. – режим доступу: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-5282-5

References:

1. Andreieva Yu., Buryachenko K. (2024). Qualitative analysis of fourth-order hyperbolic equations, Front. in Applied. Math. and Statistics, V.10. – retrieved from: https://doi.org/10.3389/fams.2024.1467199
2. Fichera G. (1997). A boundary value problem connected with response of semi-space to a short laser pulse. Rend Math Acc Lincei, 8(3), pp. 197 – 228. – retrieved from: https://eudml.org/doc/244317
3. Hector L. G., Hetnarski R. B. (1996). Thermal stress due to a laser pulse: Elastic solution., Journal of Applied Mechanics, 63(1), pp. 38 – 46. – retrieved from: https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-abstract/63/1/38/396423/Thermal-Stresses-due-to-a-Laser-Pulse-Elastic?redirectedFrom=fulltext
4. Hetnarskij R. B., Ignaczak J. (1994). Generalized thermoelasticity: response of semispace to a short laser pulse. Journal of Thermal Stresses,17, pp. 377 – 396. – retrieved from: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/01495739.2018.1527616

5. Mawhin J., Ortega R., Robles-Perez A. (2005). Maximum principle for bounded solutions of the telegraph equation in 2- and 3-dim. and applications, Journal of Differential Equations, pp. 42–63. – retrieved from: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631073X02024068
6. Nowacki W. (1978). Some general theorems of thermo-piezoelectricity. Journal of Thermal Stresses, V. 1, pp. 171 – 182. – retrieved from: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01495737808926940
7. Protter M., Weinberger H. (1984). Maximum principle in Differential Equations, Springer-Verlag New York. Inc.,261 p. – retrieved from: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-5282-5

YU. KUDRYCH
Junior researcher,
Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine
ju.kudrych@donnu.edu.ua

M. HRONSKA
Master of mathematics,
Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine
hronska.m@donnu.edu.ua

M. O. PASICHNYY
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Head of the Department of Physics
The Bohdan Khmelnytsky NationalUniversity of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine
pasichnyy@ukr.net

QUALITATIVE AND NUMERICAL ANALYSIS OF LASER-PULSE EQUATION

DOI: 10.31651/2076-5851-2025-58-66 PACS 02, 02.30, 02.60

The study of the equation of the laser pulse, as well as initial and initial-boundary (mixed) problems for this equation is a rather relevant topic for researchers, because of its numerical application. The development of modern technologies makes it possible to widely use laser radiation in biological research (laboratory experiments), medicine (laser surgery, laser therapy) and cosmetology, industry (cutting, welding, painting, etc.), in commercial activities, information transmission systems. It is worth noting the expansion of the use of laser radiation in modern communication technologies. Due to the fact that the laser is able to carry much more information than radio waves, laser technology is now coming out on top, compared to radio engineering. At the same time, laser pulses are studied for the most part by numerical methods. This is because getting an explicit analytic solution is, in some cases, a rather difficult task. However, an explicit analytical solution allows us to explore many qualitative properties, which is quite valuable in terms of the development of the mathematical theory of laser radiation. In the presented work on the use of the Fourier method, we obtain an explicit analytical solution of the first mixed problem for the laser-pulse equation of the fourth-order. One of the effective tools for the study of qualitative properties of solutions of boundary value problems in mathematical physics is also the maximum principle. The problem is that in the classical theory of mathematical physics, the maximum principle is well studied only for parabolic and elliptic equations. The laser pulse equation, which is under consideration of the present work, is an equation of the hyperbolic type, for which the maximum principle does not *exist in the classical formulation, in addition, it is a fourth order equation. All these nuances make the task posed in this work relevant both from a mathematical point of view, which allows to increase theoretical developments in this problem, and for further applications of laser technologies*.

Keywords: fourth-order partial differential equations, fourth-order hyperbolic equations, laser pulse equations, mixed problem, Fourier method.

Одержано редакцією 20.10.2025.
Прийнято до друку 03.11.2025