герб

ВІСНИК ЧЕРКАСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№ 1. 2024

Фізика матеріалів
Математична та обчислювальна фізика
Методичні нотатки - з досвіду викладання фізики та математики в вищій школі

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

ISSN 2076-5851
DOI: 10.31651/2076-5851-2024-1

ВІСНИК ЧЕРКАСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Виходить 1 раз на рік
Заснований у березні 1997 року

№ 1. 2024

Черкаси – 2024

ISSN: 2076-5851

Засновник, редакція, видавець і виготовлювач –
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 21394-11194Р від 25.06.2015 р.

Наукові статті збірника рекомендовані фізикам, математикам - науковцям, викладачам вищої школи, аспірантам, студентам та пошукачам.

Журнал входить до переліку наукових фахових видань України з фізико-математичних наук (Наказ МОН України від 12 травня 2015 р. № 528).

Випуск № 1. 2024 наукового журналу Вісник Черкаського університету. Серія: фізико-математичні науки видається за рішенням Вченої ради Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького (протокол № 5 від 19.12.2024 року).

Журнал індексується в міжнародних наукових базах CiteFactor (impact factor 0,9),Google Scholar.

Редакційна колегія серії:

Ляшенко Ю.О., д.ф.-м.н., проф. (головний редактор); Сторожук Н.В., к.ф.-м.н., доц.. (відповідальний секретар); Гусак А.М., д.ф.-м.н., проф.; Danielewski Marek, Professor (Poland); Chih Chen, Professor (Taiwan); Erdelyi Zoltan, Professor (Hungary); Filipek Robert, Professor (Poland); Hodaj Fiqiri, Professor (France); Kodentsov Alexandre, Dr. (Netherlands); Kozubski Rafal, Professor, DSc (Poland); Liashenko Oleksii, Dr. (Switzerland); Malyi Oleksandr, Dr. (USA); Герасименко В.І., д.ф.-м.н., проф.; Гохман О.Р., д.ф.-м.н., проф.; Запорожець Т.В., д.ф.-м.н., проф.; Зуєв О.Л., д.ф.-м.н., проф.; Головня Б.П., д.т.н., доц.; Мазанко В.Ф., д.т.н., проф.; Мінаєв Б.П., д.х.н., проф.; Слинько В.І., д.ф.-м.н.; Соловйов В.М., д.ф.-м.н., проф.; Стеблянко П.О., д.ф.-м.н., проф.; Шматко О.А., д.т.н., проф.; Щербак В.Ф., д.ф.-м.н., проф.; Буряченко К.О., к.ф.-м.н., доц.; Гладка Л.І., к.ф.-м.н., доц.; Корнієнко С.В., к.ф.-м.н., доц.; Пасічний М.О., к.ф.-м.н., доц.; Атамась В.В., к.ф.-м.н., доц.; Бабенко С.В., к.ф.-м.н.

За дотримання прав інтелектуальної власності, достовірність матеріалів та обгрунтування висновків відповідають автори.

Адреса редакційної колегії:
18000, Черкаси, бульвар Шевченка, 79,
Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького,
кафедра фізики. Тел. (0472) 32-12-20
web-сайт: http://phys-ejournal.cdu.edu.ua
e-mail: phys_math_bulletin@ukr.net

© Черкаський національний університет, 2024

ISSN: 2076-5851

Founder, Editor, Publisher and Manufacturer -
Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy
Certificate of state registration KB № 21394-11194P dated 25.06.2015

Scientific articles of the collection are recommended to physicists, mathematicians – scientists, high school lecturers, graduate students, students and researchers.
The journal is included in the list of scientific professional publications of Ukraine in physical and mathematical sciences (Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine of May 12, 2015 № 528).
Issue № 1. 2024 of the scientific journal Bulletin of Cherkasy University. Series: Physical and Mathematical Sciences is published by the decision of the Academic Council of Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy (Minutes № 5 of 19.12.2024).

The journal is indexed in international scientific databases CiteFactor (impact factor 0.9), Google Scholar.

Editorial board of the series:

Liashenko Yu.O., D. of Ph.-M. Sc., prof. (Editor in Chief); Storozhuk N.V., Cand. of Ph.-M. Sc., Assoc. Prof. (Executive Secretary); Gusak A.M., D. of Ph.-M. Sc., Prof.; Danielewski Marek, Professor (Poland); Chih Chen, Professor (Taiwan); Erdelyi Zoltan, Professor (Hungary); Filipek Robert, Professor (Poland); Hodaj Fiqiri, Professor (France); Kodentsov Alexandre, Dr. (Netherlands); Kozubski Rafal, Professor, DSc (Poland); Liashenko Oleksii, Dr. (Switzerland); Malyi Oleksandr, Dr. (USA); Gerasimenko V.I., D. of Ph.-M. Sc., Prof.; Gokhman O.R., D. of Ph.-M. Sc., Prof.; Zaporozhets T.V., D. of Ph.-M. Sc., Prof.; Zuev O.L., D. of Ph.-M. Sc., Prof.; Golovnya B.P., D. of Tech. Sc., Assoc.; Mazanko V.F., D. of Tech. Sc., Prof.; Minaev B.P., D. of Ch. Sc., Prof.; Slynko V.I., D. of Ph.-M. Sc.; Solovyov V.M., D. of Ph.-M. Sc.,prof.; Steblyanko P.O., D. of Ph.-M. Sc., prof.; Shmatko O.A., D. of Tech. Sc., Prof.; Shcherbak V.F., D. of Ph.-M. Sc., prof.; Buryachenko K.O., D. of Ph.-M. Sc., Assoc.; Gladka L.I., Cand. of Ph.-M. Sc., Assoc.; Kornienko S.V., Cand. of Ph.-M. Sc., Assoc.; Pasichny M.O., Cand. of Ph.-M. Sc., Assoc.; Atamas V.V., Cand. of Ph.-M. Sc., Assoc.; Babenko S.V., Cand. of Ph.-M. Sc.

The authors are responsible for the observance of intellectual property rights, authenticity of materials and substantiation of conclusions.

Editorial Board Address:
18000, Cherkasy, Shevchenko Boulevard, 79
Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy,
Department of Physics. Tel. (0472) 32-12-20
website: http://phys-ejournal.cdu.edu.ua
e-mail: phys_math_bulletin@ukr.net

© Cherkasy National University, 2024

ORCID: 0000-0003-2737-2050
С. В. БАБЕНКО
Кандидат фізико-математичних наук, старший викладач, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна
differenceeq@vu.cdu.edu.ua

ORCID: 0009-0007-1750-8395
А. В. ГОНЧАРЕНКО
Магістрантка, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна
honcharenko.anna1619@vu.cdu.edu.ua

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-3-20 PACS: 89.20.Bb, 07.90+c

ПОБУДОВА КЕРУВАННЯ, ЩО ЗАБЕЗПЕЧУЄ ТРЕКІНГ ЛІДЕРА У СИСТЕМІ БПЛА ПЛАНЕРНОГО ТИПУ

У статті розглядається система, утворена двома БПЛА планерного типу. Прикладами таких БПЛА є керовані бомби (наприклад, бомба GBU виробництва компанії Boeing). Специфікою БПЛА-планерів є те, що вони летять не за допомогою двигунів, як це роблять ракети, літаки чи коптери, а виключно під дією сили тяжіння та аеродинамічних сил, зумовлених геометрією об'єкта (наявність крил).

Один із планерів системи виконує роль лідера, тобто керування ним здійснюється автоматично за заданим алгоритмом або ж ним керує оператор. Припускається, що завдання лідера – вразити певну ціль на Землі. Другий планер системи є послідовником, для якого передбачена можливість будувати автоматичне керування. Задача полягає в тому, щоб побудувати для послідовника таке керування, за допомогою якого він би слідував за лідером, так щоб влучити в ціль, на яку орієнтований лідер. Для побудови такого керування у першій частині статті сформульовано умову слідування послідовника за лідером. А саме, під слідуванням послідовника за лідером мається на увазі такий рух послідовника, при якому виконується принаймні одна з умов: 1) співнапрямленими є вектор швидкості $\boldsymbol{V}$ послідовника та вектор, що рівний різниці радіус-вектора $\boldsymbol{r_0}$ центра мас лідера і радіус-вектора $\boldsymbol{r}$ центра мас послідовника, 2) положення послідовника і лідера співпадають. У другій частині статті на основі диференціальних рівнянь руху виведено рівняння для похибки, за яку приймається векторний добуток векторів $\boldsymbol{r_0 - r}$ та $\boldsymbol{V}$. Показано, що за певних припущень рівність нулю похибки еквівалентна умові слідування послідовника за лідером. На основі рівнянь для похибки, використовуючи принцип керування ковзним режимом, побудовано керування для планера-послідовника у вигляді закону зміни вектора його кутової швидкості.

Ключові слова: плануючий БПЛА, трекінг лідера, керування, ковзний режим, Matlab.

1. Вступ

Беззаперечним є той факт, що у російсько-українській війні важливу роль відіграють технології, пов'язані з БПЛА. Окреме місце тут займають БПЛА планерного типу, прикладами яких є керовані авіабомби. Специфікою БПЛА-планерів є те, що вони летять не за допомогою двигунів, як це роблять ракети, літаки чи коптери, а виключно під дією сили тяжіння та аеродинамічних сил, зумовлених геометрією об'єкта (наявність крил). До прикладу, компанія Boeing виробляє бомби GBU, що є звичайними авіабомбами, які оснащують сучасною системою JDAM (Joint Direct Attack Munition). Згідно інформації, наведеної на офіційному сайті Повітряних Сил США, JDAM є хвостовим комплектом наведення, який перетворює некеровану бомбу на «розумну». Бомби, обладнані такою системою, здатні вражати цілі в радіусі 15 миль від місця запуску з літака. При цьому влучання відбувається з похибкою до 5 метрів.

Розвиток технологій, пов'язаних з БПЛА планерного типу має дві компоненти – технічну і теоретичну. До теоретичної компоненти можна віднести побудову математичних моделей, які описують динаміку БПЛА, синтез керувань, який здійснюється на основі цих моделей, та побудова програмних компонент, за допомогою яких реалізовуються синтезовані керування. Щодо побудови математичних моделей та синтезу керувань, то в останнє десятиліття з'являється все більше публікацій, присвячених цій тематиці. У них пропонуються різноманітні схеми керування, які дозволяють плануючим об'єктам виконувати певні задачі. Частина робіт присвячена дослідженню поведінки одного БПЛА. Так, в роботі [9] пропонується керування для плануючої бомби, що дозволяє їй влучити у ціль на заданій висоті над поверхнею землі і під заданим кутом до вертикальної площини, яка проходить через цю ціль. Для побудови такого керування використовується метод наведенням по векторному полю (vector field guidance). У роботі [5] плануюча бомба розглядається як точка, а не як тверде тіло. В рамках такої математичної моделі пропонується оптимальне керування, яке дозволяє бомбі досягнути заданої точки. Для побудови керування використовується ідея методу, який автори називають shooting method. Стаття [2] присвячена побудові керування у вигляді PID контролера для стабілізації орієнтації бомби. З огляду на специфіку контролерів такого типу, у згаданих статтях розглядаються лінеаризовані рівняння руху об'єкта керування. Стаття [11] присвячена побудові керування, яке стабілізує орієнтацію планера. Планер розглядається як тверде тіло, що має 6 ступенів вільності. Для побудови керування використано метод nonlinear dynamic inversion (NDI). У статті [4] пропонується моделювання і симуляція руху планера, який розглядається як тверде тіло, що вільно падає під дією сили тяжіння.

Інша частина присвячена дослідженню мульти-агентних систем БПЛА планерного типу. У них пропонуються так звані кооперативні схеми (опис завдань, які агенти мають виконувати спільно при взаємодії один з одним) і будуються керування, які дозволяють ці схеми реалізовувати. Так, у [14] для мульти-агентної системи, утвореної надзвуковими планерами, побудоване розподілене керування формацією за припущення, що рух усіх агентів описується однаковими рівняннями. Мета керування полягає в тому, щоб відстані між планерами по X та Y координатах прямували до заданих значень. У статті [13] також розглядається мульти-агентна система надзвукових планерів, для якої будується керування, при якому дальність до цілі кожного планера прямує до середнього арифметичного дальностей до цілі усіх планерів системи. У статті [8] розглядається система двох надзвукових планерів, для яких будуються індивідуальні траєкторії і керування, завдяки яким обидва планери одночасно влучають у ціль.

Таким чином, актуальною залишається задача про побудову керування для планера, за допомогою якого він слідує за іншим планером. Мета дослідження,

результати якого запропоновані у даній статті, полягає в тому, щоб сформулювати умову «слідування» планером-послідовником за планером-лідером та синтезувати керування, яке забезпечує відповідну поведінку послідовника, за наявності збурень та варіації параметрів системи.

2. Постановка задачі. Критерій слідування планером-послідовником за планером-лідером

Розглянемо систему, яка складається з БПЛА планерного типу. Прикладами таких БПЛА є керовані авіаційні бомби (рис. 1, а) та малогабаритні високоточні боєприпаси GLSDB (рис. 1, б).

а) б)

Рис. 1. а) Авіабомба УПАБ-1500В [1].
б) Бомба GBU-39, яка є складовою GLSDB [6] .
Fig. 1. a) UPAB-1500V air bomb [1].
b) GBU-39 bomb, which is a component of GLSDB [6] .

Надалі об’єкти системи будемо називати коротко – планери. Припускається, що усі планери починають свій рух з деякої точки (чи декількох різних точок) над поверхнею Землі (наприклад, з висоти 10 км) і вільно падають донизу під дією сили тяжіння та аеродинамічних сил. Запуск з початкової точки може здійснюватися, наприклад, за допомогою літака.

При цьому один із планерів системи виконує роль лідера, тобто керування ним здійснюється автоматично за заданим алгоритмом або ж оператором. Припускається, що завдання лідера – вразити певну ціль на Землі. Решта планерів системи є послідовниками, для яких є можливість будувати керування, за допомогою яких вони певним чином рухаються за лідером. *Задача полягає в тому, щоб побудувати для послідовників таке керування, за допомогою якого вони рухалися б так, щоб влучити в околі цілі лідера.*

Означення 1. *Будемо рух послідовників, описаний вище, називати слідуванням за лідером.*

Припускається, що послідовник отримує в режимі онлайн інформацію про свій стан та стан лідера (координати місця знаходження, значення вектора швидкості та ін.). Припустимо також, що послідовник один, оскільки задача про побудову керування для групи послідовників суттєво ускладнюється необхідністю враховувати те, що окрім виконання завдань рухатися за планером-лідером, планери-послідовники повинні уникати зіткнень між собою.

Дослідимо, за яких обставин можна вважати, що послідовник слідує за лідером. Видається природнім вважати, що послідовник влучить в околі цілі лідера, якщо різниці координат і швидкостей послідовника і лідера прямують до нуля або до деякого

відмінного від нуля значення при $t \to \infty$ або за скінченний час. Цього можна досягнути у випадку, коли роботи системи мають власні двигуни, що дозволяють прискорювати чи сповільнювати рух. Особливістю ж планерів є те, що вони не мають двигунів, а тому планер-послідовник, взагалі кажучи, не може наздогнати планера-лідера у випадку відставання, бо його швидкість зумовлена тільки силою тяжіння, двигуна він не має. Відповідно, досягти прямування до нуля чи деякого відмінного від нуля значення різниць координат і швидкостей послідовника і лідера, взагалі кажучи, не вдасться. Враховуючи цю особливість, пропонується новий критерій слідування послідовника за лідером. Позначимо через $\boldsymbol{r_0}$ та $\boldsymbol{r}$ (далі у статті скрізь жирним шрифтом позначаються вектори, звичайним – скалярні величини та матриці) радіуси-вектори центрів мас M_0 і M планера-лідера та планера-послідовника, відповідно, а через $\boldsymbol{V_0}$ та $\boldsymbol{V}$ – вектори їхніх швидкостей, відповідно, в довільний момент часу (див. рис. 2). Уточнимо означення 1 так.

Означення 2. *Слідуванням послідовника за лідером будемо мати на увазі такий рух послідовника, при якому вектори* $\boldsymbol{r_0 - r}$ *та* $\boldsymbol{V}$ *є співнапрямленими, тобто кут* σ *між цими векторами рівний нулю, або ж вектор* $\boldsymbol{r_0 - r}$ *дорівнює нулю, тобто положення послідовника і лідера співпадають.*

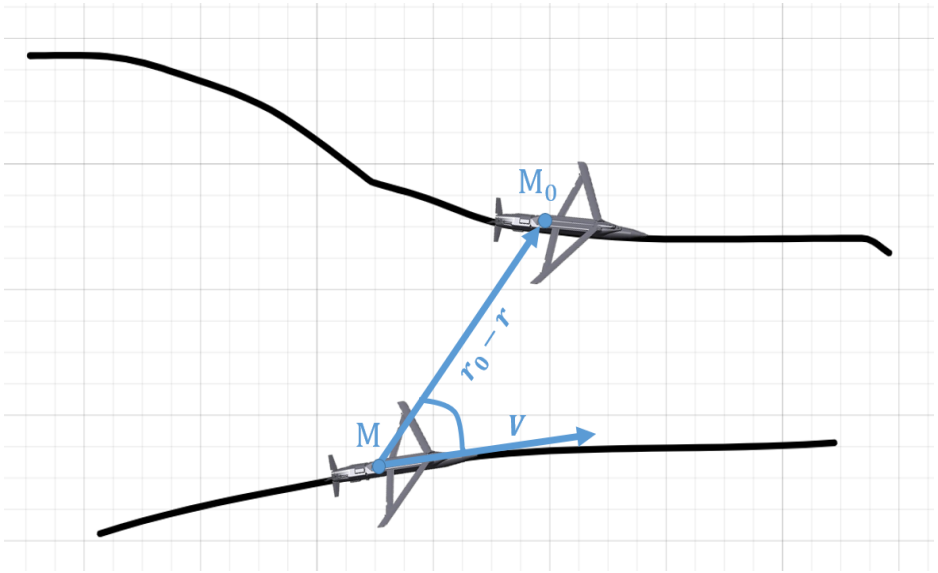


Рис. 2. Кут між векторами $\boldsymbol{r_0 - r}$ та $\boldsymbol{V}$. Точки M_0 та M позначають центри мас планера-лідера та планера-послідовника, відповідно.

Fig. 2. The angle between vectors $\boldsymbol{r_0 - r}$ and $\boldsymbol{V}$. Points M_0 and M denote the centers of mass of the leader glider and the follower glider, respectively.

Таке означення видається природнім, оскільки якщо послідовник буде намагатися рухатися так, щоб виконувалася умова співнапрямленості векторів, то послідовник влучить в околі цілі лідера. Коли ж станеться так, що положення послідовника співпадатиме з положенням лідера (див. рис. 3), то обидва планери влучать точно в одну ціль. Щоправда, співпадіння положень означає зіткнення планерів і цієї ситуації треба уникати, але це інша задача, яку ми не розглядаємо.

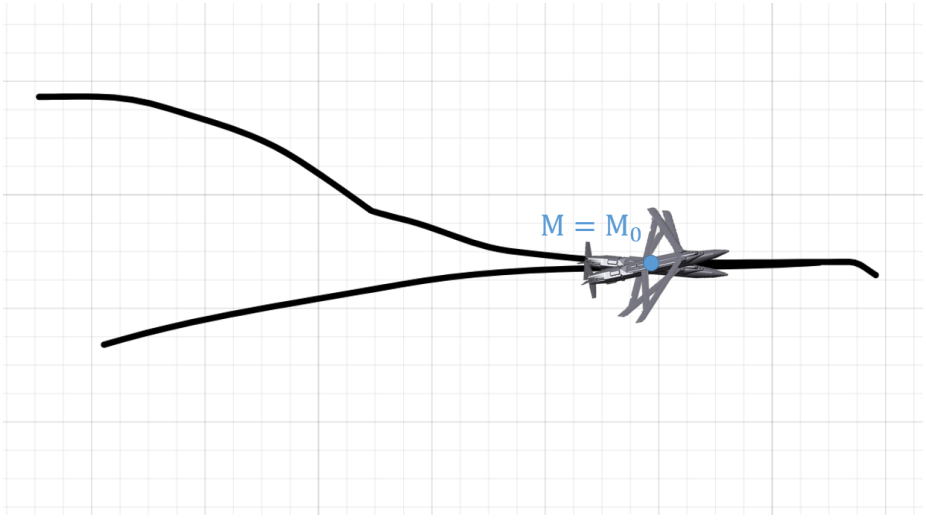


Рис. 3. Співпадіння положень планера-лідера та планера-послідовника.
Fig. 3. Coincidence of the positions of the leader glider and the follower glider.

Таким чином, критерій слідування послідовника за лідером має вигляд:

$$\sigma(t) = \angle\big(\boldsymbol{r_0}(t) - \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{V}(t)\big) \to 0 \text{ або } \boldsymbol{r_0}(t) - \boldsymbol{r}(t) \to 0, \quad (1)$$

при $t \to \infty$ (тобто, асимптотично).

Отже, *задача полягає в тому, щоб побудувати таке керування для планера-послідовника, за допомогою якого він би рухався так, щоб при цьому виконувалися умови (1).*

Для того, щоб виходячи з критерію (1) побудувати необхідні керування, потрібно обчислити кут σ, виразивши його через параметри системи, або ж ввести допоміжну величину, яка певним чином пов'язана з кутом. Якщо піти першим (прямим) шляхом, то кут можна обчислити, використовуючи відому формулу для скалярного добутку:

$$\cos\sigma = \frac{\langle \boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}\rangle}{\|\boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}\| \cdot \|\boldsymbol{V}\|}, \quad (2)$$

де $\langle \boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}\rangle$ позначає скалярний добуток векторів $\boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}$ та $\boldsymbol{V}$, а в знаменнику записаний добуток їх норм. Для полегшення сприйняття аргументи в дужках опущено. З формули (2) одержимо, що $\sigma = \arccos\left(\frac{\langle \boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}\rangle}{\|\boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}\| \cdot \|\boldsymbol{V}\|}\right)$. Далі, якщо керування будується досяганням ковзних режимів, то σ необхідно буде диференціювати по t, з тією метою щоб отримати диференціальне рівняння, якому ця величина задовольняє. Однак, вираз для σ утворений композицією аркфункції, дробу, коренів, тому диференціювання призведе до складних виразів, з якими потім буде складно працювати. Крім того, у ситуації співпадіння положень послідовника і лідера кут між векторами $\boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}$ та $\boldsymbol{V}$ взагалі невизначений. З огляду на описані особливості роботи з формулою для величини σ, у даній роботі пропонується замість σ розглянути допоміжну величину, яка непрямо характеризує σ. У якості такої величини розглянемо векторний добуток $(\boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{V}$. Як відомо, модуль векторного добутку двох векторів дорівнює добутку їх модулів на синус кута між цими векторами. Звідси слідує, що якщо кут між векторами дорівнює нулю, то їх векторний добуток дорівнює нулю. Обернене твердження, взагалі кажучи, хибне, оскільки причиною того, що векторний добуток двох векторів дорівнює нулю, може бути не тільки рівність нулю кута між векторами, але й інші обставини: кут між векторами дорівнює 180 градусів чи якийсь із цих векторів є нуль-вектором. Таким чином, умова

$$\big(\boldsymbol{r_0}(t) - \boldsymbol{r}(t)\big) \times \boldsymbol{V}(t) \to \boldsymbol{0}, \quad (3)$$

при $t \to \infty$, не є умовою, еквівалентною умові (1). Однак, за певних припущень еквівалентність можна досягнути. Зробимо ці припущення.

Припущення 1. *Запуск планера-лідера і планера-послідовника відбувається так, що з деякого моменту часу і впродовж усього часу подальшого їх польоту кут між* $\boldsymbol{r_0 - r}$ *та* $\boldsymbol{V}$*, виражений у градусах, має верхню межу, що є числом, меншим за 90 градусів.*

Припущення 2. *Швидкості планера-лідера і планера-послідовника мають додатну нижню межу на всьому відтинку часу їх польоту.*

За Припущень 1 і 2 умови (1) і (3) еквівалентні, оскільки ці припущення гарантують, що векторний добуток у формулі (3) дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли дорівнює нулю кут між векторами $\boldsymbol{r_0 - r}$ та $\boldsymbol{V}$ або ж дорівнює нулю вектор $\boldsymbol{r_0 - r}$.

Векторний добуток з формули (3) будемо називати похибкою і позначатимемо через $\boldsymbol{\varepsilon}$.

3. Основний результат

3.1. Диференціальні рівняння руху планера-лідера та планера-послідовника

Для того, щоб побудувати керування, які забезпечують виконання умови (3), необхідно записати диференціальні рівняння, яким задовольняє похибка. Для побудови цих диференціальних рівнянь потрібно мати рівняння руху послідовника та лідера. У статті [11] наведено диференціальні рівняння, які описують рух повітряного апарата планерного типу (див. рис. 4). Як зазначено у [11], ці рівняння описують рух планера за таких припущень: планер розглядається як тверде тіло, обертання Землі не враховується, моменти інерції і центр мас планера вважаються сталими, $X - Z$ площина планера припускається симетричною.

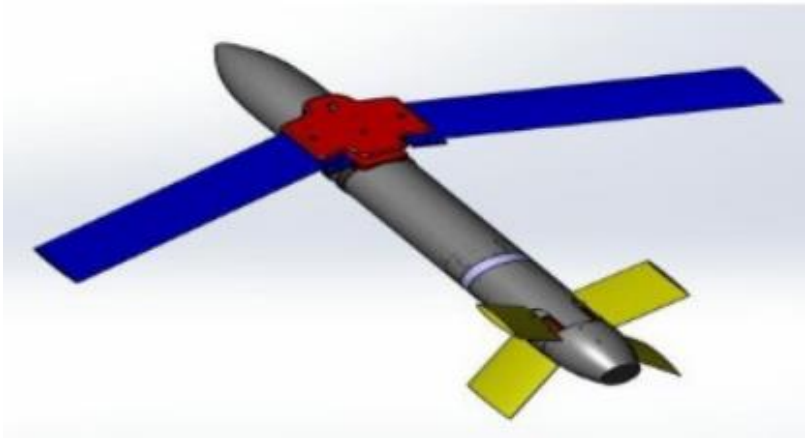


Рис. 4. Геометрія планера, виконана в CAD [11].

Fig. 4. The geometry of the AGV body's airframe in CAD [11].

Згадані вище рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{-mg\sin\theta - F_x}{m} + rv - qw \\ \dot{v} &= \frac{mg\sin\varphi\cos\theta + F_y}{m} - ru + pw \\ \dot{w} &= \frac{mg\cos\varphi\cos\theta - F_z}{m} + qu - pv \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{1}{I_{xx}}\left(L + \left(I_{yy} - I_{zz}\right)qr\right)\\ \dot{q} &= \frac{1}{I_{yy}}\left(M + \left(I_{zz} - I_{xx}\right)rp\right)\\ \dot{r} &= \frac{1}{I_{zz}}\left(N + \left(I_{xx} - I_{yy}\right)pq\right)\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= p + q\sin\varphi\tan\theta + r\cos\varphi\tan\theta\\ \dot{\theta} &= q\cos\varphi - r\sin\varphi\\ \dot{\psi} &= q\frac{\sin\varphi}{\cos\theta} + r\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u(\cos\theta\cos\psi) + v(\sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi) +\\ &+w(\cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi)\\ \dot{y} &= u(\cos\theta\sin\psi) + v(\sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi) +\\ &+w(\cos\varphi\sin\theta\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\\ \dot{z} &= u(-\sin\theta) + v(\sin\varphi\cos\theta) + w(\cos\varphi\cos\theta)\end{aligned} \tag{7}$$

У цих рівняннях змінні φ, θ і ψ позначають кути Ейлера, p, q та r – компоненти вектора кутової швидкості, x, y, z – координати центра мас планера у системі координат, пов'язаній із Землею, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – головні моменти інерції планера. F_x, F_y, F_z і L, M, N позначають аеродинамічні сили і моменти відповідно і обчислюються за формулами:

$$F_x = \bar{q}SC_D,\ F_y = \bar{q}SC_Y,\ F_z = \bar{q}SC_L \tag{8}$$

$$L = \bar{q}SbC_l,\ M = \bar{q}ScC_m,\ N = \bar{q}SbC_n \tag{9}$$

Коефіцієнти у формулах (8) і (9) у свою чергу представляються згідно [11] як лінійні комбінації параметрів, що незалежно один від одного визначають специфіку польоту.

$$\begin{aligned}C_D &= C_{D_0} + \left(C_L - C_{L_0}\right)2\pi e\cdot AR + \left|C_{D_{\delta_e}}\delta_e\right| + \left|C_{D_{\delta_a}}\delta_a\right| + \left|C_{D_{\delta_r}}\delta_r\right|\\ C_Y &= C_{y_\beta}\beta + C_{y_{\delta_a}}\delta_a + C_{y_{\delta_r}}\delta_r + \frac{b}{2V_T}\left(C_{y_p}p + C_{y_r}r\right)\\ C_L &= C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + C_{L_{\delta_e}}\delta_e + \frac{c}{2V_T}\left(C_{L_{\dot{\alpha}}}\dot{\alpha} + C_{L_q}q\right)\\ C_m &= C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_{\delta_e}}\delta_e + \frac{c}{2V_T}\left(C_{m_{\dot{\alpha}}}\dot{\alpha} + C_{m_q}q\right)\\ C_l &= C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta_a}}\delta_a + C_{l_{\delta_r}}\delta_r + \frac{b}{2V_T}\left(C_{l_p}p + C_{l_r}r\right)\\ C_n &= C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta_a}}\delta_a + C_{n_{\delta_r}}\delta_r + \frac{b}{2V_T}\left(C_{n_p}p + C_{n_r}r\right)\end{aligned} \tag{10}$$

У цих формулах літерою C з індексами позначено аеродинамічні коефіцієнти; $\delta_a, \delta_e, \delta_r$ позначають відхилення елерона, руля висоти і керма напрямку, відповідно. α позначає кут атаки; β – кут бокового ковзання; $C_{D_0}, C_{L_0}, C_{m_0}$ є аеродинамічними коефіцієнтами при нульовому куті атаки, $\bar{q}$ позначає динамічний тиск, V_T – швидкість набігаючого повітряного потоку, AR характеризує геометрію крила, e – коефіцієнт Освальда. Більш детальний опис цих параметрів, а також приклади їх можливих значень можна знайти у роботі [4].

Рівняння (4)-(7) візьмемо в якості рівнянь руху планера-послідовника у нашій системі послідовник-лідер. При цьому параметрами керування планера-послідовника вважатимемо змінні δ_a, δ_e і δ_r.

Для зручності подальших обчислень, запишемо системи (4)-(7) у такій векторно-матричній формі:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}} &= \bar{A}(\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{v},\\ \dot{\boldsymbol{\Gamma}} &= \bar{B}(\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{\Omega},\\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Omega}) + C\boldsymbol{u_1},\\ \dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{u_1}) + G_1(\mathbf{V})\boldsymbol{\Omega},\end{aligned} \tag{11}$$

де:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}(\boldsymbol{\Gamma}) = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(\boldsymbol{\Gamma}) = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varphi\tan\theta & \cos\varphi\tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \frac{\sin\varphi}{\cos\theta} & \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Omega}) = \begin{bmatrix} \frac{\bar{q}Sb}{I_{xx}}\left(C_{l_\beta}\beta + \frac{b}{2V_T}\left(C_{l_p}p + C_{l_r}r\right)\right) + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}qr \\ \frac{\bar{q}Sc}{I_{yy}}\left(C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + \frac{c}{2V_T}\left(C_{m_{\dot{\alpha}}}\dot{\alpha} + C_{m_q}q\right)\right) + \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}}rp \\ \frac{\bar{q}Sb}{I_{zz}}\left(C_{n_\beta}\beta + \frac{b}{2V_T}\left(C_{n_p}p + C_{n_r}r\right)\right) + \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}pq \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{u_1}) = \begin{bmatrix} -g\sin\theta - \frac{\bar{q}SC_D}{m} \\ g\sin\varphi\cos\theta + \frac{\bar{q}S}{m}\left(C_{y_\beta}\beta + C_{y_{\delta_a}}\delta_a + C_{y_{\delta_r}}\delta_r\right) \\ g\cos\varphi\cos\theta - \frac{\bar{q}S}{m}\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + C_{L_{\delta_e}}\delta_e + \frac{c}{2V_T}\cdot C_{L_\alpha}\dot{\alpha}\right) \end{bmatrix},$$

$$G_1(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} 0 & v & -w \\ \frac{\bar{q}SbC_{y_p}}{2mV_T} + w & 0 & \frac{\bar{q}SbC_{y_p}}{2mV_T} - u \\ -v & -\frac{\bar{q}SbC_{L_q}}{2mV_T} + u & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \frac{\bar{q}SbC_{l_{\delta_a}}}{I_{xx}} & 0 & \frac{\bar{q}SbC_{l_{\delta_r}}}{I_{xx}} \\ 0 & \frac{\bar{q}ScC_{m_{\delta_e}}}{I_{yy}} & 0 \\ \frac{\bar{q}SbC_{n_{\delta_a}}}{I_{zz}} & 0 & \frac{\bar{q}SbC_{n_{\delta_r}}}{I_{zz}} \end{bmatrix}.$$

Аналогічний вигляд мають також рівняння планера-лідера. Нижче наведено ці рівняння, записані вже у векторно-матричному вигляді:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{0}} &= \bar{A}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{0}})\boldsymbol{v}_{\mathbf{0}},\\ \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\mathbf{0}} &= \bar{B}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{0}})\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{0}},\\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbf{0}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{0}}) + C\boldsymbol{u}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}},\\ \dot{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} &= \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{u}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}}\right) + G_1(\boldsymbol{v}_{\mathbf{0}})\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{0}},\end{aligned} \tag{12}$$

де:

$$\boldsymbol{X}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \delta_{a0} \\ \delta_{e0} \\ \delta_{r0} \end{bmatrix}.$$

Компоненти цих векторів мають той же сенс, що і аналогічні компоненти у рівняннях планера-послідовника, тільки цей сенс стосується планера-лідера. Функції $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, G_1 та матриця C – ті ж самі, що і для планера-послідовника, тільки з відповідними аргументами.

Керування $\boldsymbol{u_1^0}$ лідера вважається відомим на відміну від керування $\boldsymbol{u_1}$ послідовника, яке нам треба синтезувати.

3.2. Загальна схема керування. Виведення диференціальних рівнянь для похибки

Як уже згадувалося у попередньому пункті цього розділу, для побудови керувань, тобто такого закону зміни параметрів керування δ_a, δ_e і δ_r, при якому виконується умова (3) для похибки $\boldsymbol{\varepsilon}$, необхідно записати диференціальні рівняння для $\boldsymbol{\varepsilon}$. Для цього обчислимо $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Згідно визначення, $\boldsymbol{\varepsilon} = \big(\boldsymbol{r_0}(t) - \boldsymbol{r}(t)\big) \times \boldsymbol{V}(t)$.

З огляду на рівняння руху (11) - (12) послідовника і лідера, у цій формулі $\boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{X}_0$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{X}$, а $\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{X}}$, тобто $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{X}) \times \dot{\boldsymbol{X}}$. Виходячи з означення і властивостей векторного добутку та властивостей операції диференціювання, одержуємо, що:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \big(\dot{\boldsymbol{X}}_0 - \dot{\boldsymbol{X}}\big) \times \dot{\boldsymbol{X}} + (\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{X}) \times \ddot{\boldsymbol{X}} = \dot{\boldsymbol{X}}_0 \times \dot{\boldsymbol{X}} + (\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{X}) \times \ddot{\boldsymbol{X}}.$$

Отже, формула для $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ має вигляд:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{X}}_0 \times \dot{\boldsymbol{X}} + (\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{X}) \times \ddot{\boldsymbol{X}}. \tag{13}$$

В отриманому виразі функції $\dot{\boldsymbol{X}}$, $\dot{\boldsymbol{X}}_0$ обчислюються за формулами (11) і (12) відповідно, а функція $\ddot{\boldsymbol{X}}$ є похідною по t функції $\dot{\boldsymbol{X}}$. Обчислимо $\ddot{\boldsymbol{X}}$ використовуючи систему рівнянь (7), а саме, продиференціювавши кожне рівняння цієї системи. Одержимо:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} = {} & \dot{u}\cos\theta\cos\psi - u\big(\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi + \dot{\psi}\sin\psi\cos\theta\big) + \dot{v}(\sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi) \\
& + v\big(\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta\cos\psi - \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta\sin\psi \\
& + \dot{\varphi}\sin\varphi\sin\psi - \dot{\psi}\cos\varphi\cos\psi\big) + \dot{w}(\cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) \\
& + w(-\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta\cos\psi - \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta\sin\psi \\
& + \dot{\varphi}\cos\varphi\sin\psi + \dot{\psi}\sin\varphi\cos\psi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y} = {} & \dot{u}\cos\theta\sin\psi - u\big(\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi - \dot{\psi}\cos\theta\cos\psi\big) + \dot{v}(\sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi) \\
& + v\big(\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta\sin\psi + \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta\cos\psi \\
& - \dot{\varphi}\sin\varphi\cos\psi - \dot{\psi}\cos\varphi\sin\psi\big) + \dot{w}(\cos\varphi\sin\theta\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi) \\
& + w(-\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta\sin\psi + \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta\cos\psi \\
& + \dot{\varphi}\cos\varphi\cos\psi - \dot{\psi}\sin\varphi\sin\psi) \\
\ddot{z} = {} & -\dot{u}\sin\theta - u\dot{\theta}\cos\theta + \dot{v}\sin\varphi\cos\theta + v\big(\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta - \dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta\big) + \dot{w}\cos\varphi\cos\theta \\
& - w(\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta)
\end{aligned}$$

Позначимо цю систему з трьох рівнянь номером (14) і перепишемо її у вигляді:

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = M \cdot \big(\dot{\boldsymbol{v}}^T, \dot{\boldsymbol{\Omega}}^T\big)^T. \tag{15}$$

Тепер можна бачити, що якщо у остаточний вираз для $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ підставити формули для обчислення $\dot{\boldsymbol{X}}, \dot{\boldsymbol{X}}_0$ та $\ddot{\boldsymbol{X}}$, то в отримане представлення для $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ будуть входити компоненти векторної функції $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{u_1})$, але не будуть входить компоненти вектора $C\boldsymbol{u_1}$, тобто диференціальне рівняння для $\boldsymbol{\varepsilon}$ буде містити не всі вирази, які містять керування $\boldsymbol{u_1}$. Іншими словами, керування $\boldsymbol{u_1}$ не напряму впливає на $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, тобто компоненти керування $\boldsymbol{u_1}$ у явному вигляді є у виразі для $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, але також ці компоненти присутні там і неявно: через диференціальне рівняння для $\boldsymbol{\Omega}$ з формул (11) вони впливають на компоненти вектора $\boldsymbol{\Omega}$, а ті в свою чергу входять у вираз для $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Описану ситуацію можна коротко записати так:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = R(\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{u_1}), \boldsymbol{u_1}). \tag{16}$$

Така залежність $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ від $\boldsymbol{u_1}$ створює проблеми для застосування до (16) методів побудови нелінійних керувань, зокрема методу ковзних режимів. Проблема із

застосуванням останнього зумовлене тим, що права частина диференціального рівняння (16) для похибки нелінійно залежить від керування $\boldsymbol{u_1}$.

Для вирішення цієї проблеми пропонується будувати керування у два етапи. Враховуючи рівняння (11), (12), (14) та (15), запишемо диференціальне рівняння (13) для похибки $\boldsymbol{\varepsilon}$ у вигляді:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = G \cdot \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{H}, \tag{17}$$

де $G, \boldsymbol{H}$ – квадратна матриця розмірності 3 і вектор розмірності 3 відповідно. Елементи матриці G обчислюються за формулами, які позначимо номером (18).

$$G_{11} = -F_{yp}\Delta z\, c\varphi\, c\psi + F_{yp}\Delta y\, c\theta\, s\varphi - 2\Delta zw\, c\varphi\, c\psi + 2\Delta zv\, c\psi\, s\varphi - F_{yp}\Delta z\, s\varphi\, s\psi\, s\theta$$

$$G_{21} = -F_{yp}\Delta z\, c\varphi\, s\psi - F_{yp}\Delta x\, c\theta\, s\varphi + F_{yp}\Delta z\, c\psi\, s\varphi\, s\theta$$

$$G_{31} = -2\Delta xv\, c\psi\, s\varphi + F_{yp}\Delta y\, c\varphi\, s\psi + 2\Delta xw\, c\varphi\, c\psi + F_{yp}\Delta x\, c\varphi\, c\psi - F_{yp}\Delta y\, c\psi\, s\varphi\, s\theta +$$

$$F_{yp}\Delta x\, s\varphi\, s\psi\, s\theta$$

$$G_{12} = -\frac{1}{c\theta}\left(F_{zq}\Delta y\, c\varphi\, c^2\theta - 2\Delta zw\, s\psi + 2\Delta zw\, c^2\varphi\, s\psi - F_{zq}\Delta z\, c\psi\, c\theta\, s\varphi +\right.$$

$$\left.2\Delta zu\, c\psi\, c\theta\, s\varphi - F_{zq}\Delta z\, c\varphi\, c\theta\, s\psi\, s\theta + 2\Delta zw\, c\varphi\, c\psi\, s\varphi\, s\theta\right)$$

$$G_{22} = -F_{zq}\Delta z\, s\varphi\, s\psi + F_{zq}\Delta x\, c\varphi\, c\theta - F_{zq}\Delta z\, c\varphi\, c\psi\, s\theta$$

$$G_{32} = \frac{1}{c\theta}\left(2\Delta xw\, c^2\varphi\, s\psi - 2\Delta xws\psi - F_{zq}\Delta x\, c\psi\, c\theta\, s\varphi + F_{zq}\Delta y\, c\theta\, s\varphi\, s\psi +\right.$$

$$\left.2\Delta xu\, c\psi\, c\theta\, s\varphi + F_{zq}\Delta y\, c\varphi\, c\psi\, c\theta\, s\theta - F_{zq}\Delta x\, c\varphi\, c\theta\, s\psi\, s\theta + 2\Delta xw\, c\varphi\, c\psi\, s\varphi\, s\theta\right)$$

$$G_{13} = -\frac{1}{c\theta}\left(2\Delta zw\, c^2\varphi\, c\psi\, s\theta - F_{yr}\Delta y\, c^2\theta\, s\varphi + F_{yr}\Delta z\, c\varphi\, c\psi\, c\theta - 2\Delta zw\, c\varphi\, s\varphi\, s\psi\ +\right.$$

$$\left.F_{yr}\Delta z\, c\theta\, s\varphi\, s\psi\, s\theta\right)$$

$$G_{23} = -F_{yr}\Delta z\, c\varphi\, s\psi - F_{yr}\Delta x\, c\theta\, s\varphi + F_{yr}\Delta z\, c\psi\, s\varphi\, s\theta$$

$$G_{33} = \frac{1}{\cos\theta}\left(2\Delta xw\, c^2\varphi\, c\psi\, s\theta + F_{yr}\Delta x\, c\varphi\, c\psi\, c\theta + F_{yr}\Delta y\, c\varphi\, c\theta\, s\psi - 2\Delta xw\, c\varphi\, s\varphi\, s\psi -\right.$$

$$\left.F_{yr}\Delta y\, c\psi\, c\theta\, s\varphi\, s\theta + F_{yr}\Delta x\, c\theta\, s\varphi\, s\psi\, s\theta\right)$$

Компоненти вектора $\boldsymbol{H}$ обчислюються за формулами, які позначимо номером (19).

$$H_1 = -F_{y0}\Delta z\, c\varphi\, c\psi + F_x\Delta y\, s\theta + \Delta yg - F_{z0}\Delta y\, c\varphi\, c\theta + F_{z0}\Delta z\, c\psi\, s\varphi + F_{y0}\Delta y\, c\theta\, s\varphi +$$

$$F_x\Delta z\, c\theta\, s\psi + F_{z0}\Delta z\, c\varphi\, s\varphi\, s\theta - F_{y0}\Delta z\, s\varphi\, s\psi\, s\theta + uv_0\, c\varphi_0\, c\psi_0\, s\theta - u_0v\, c\varphi\, c\psi\, s\theta_0 +$$

$$uw_0\, c\psi_0\, s\varphi_0\, s\theta - u_0w\, c\psi\, s\varphi\, s\theta_0 - uu_0\, c\theta\, s\psi\, s\theta_0 + uu_0\, c\theta_0\, s\psi_0\, s\theta -$$

$$2\Delta zg\, c\varphi\, c\psi\, c\theta\, s\varphi + vw_0\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\psi\, c\theta_0 - v_0w\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\psi_0\, c\theta + vv_0\, c\varphi\, c\psi\, c\theta_0\, s\varphi_0 -$$

$$vv_0\, c\varphi_0\, c\psi_0\, c\theta\, s\varphi - ww_0\, c\varphi\, c\psi_0\, c\theta\, s\varphi_0 + ww_0\, c\varphi_0\, c\psi\, c\theta_0\, s\varphi + uw_0\, c\varphi_0\, c\theta\, c\theta_0\, s\psi -$$

$$u_0w\, c\varphi\, c\theta\, c\theta_0\, s\psi_0 - vw_0\, c\psi_0\, c\theta\, s\varphi\, s\varphi_0 + v_0w\, c\psi\, c\theta_0\, s\varphi\, s\varphi_0 + uv_0\, c\theta\, c\theta_0\, s\varphi_0\, s\psi -$$

$$u_0v\, c\theta\, c\theta_0\, s\varphi\, s\psi_0 + uw_0\, c\varphi_0\, s\psi_0\, s\theta\, s\theta_0 - u_0w\, c\varphi\, s\psi\, s\theta\, s\theta_0 + uv_0\, s\varphi_0\, s\psi_0\, s\theta\, s\theta_0 -$$

$$u_0v\, s\varphi\, s\psi\, s\theta\, s\theta_0 - ww_0\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\theta\, s\psi_0\, s\theta_0 + ww_0\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\theta_0\, s\psi\, s\theta -$$

$$vw_0\, c\varphi_0\, c\theta\, s\varphi\, s\psi_0\, s\theta_0 + vw_0\, c\varphi_0\, c\theta_0\, s\varphi\, s\psi\, s\theta - v_0w\, c\varphi\, c\theta\, s\varphi_0\, s\psi_0\, s\theta_0 +$$

$$v_0w\, c\varphi\, c\theta_0\, s\varphi_0\, s\psi\, s\theta - vv_0\, c\theta\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\psi_0\, s\theta_0 + vv_0\, c\theta_0\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\psi\, s\theta$$

$$H_2 = -\Delta x g - F_x \Delta x\, s\theta + F_{z0} \Delta x\, c\varphi\, c\theta - F_x \Delta z\, c\psi\, c\theta - F_{y0} \Delta z\, c\varphi\, s\psi - F_{y0} \Delta x\, c\theta\, s\varphi - F_{z0} \Delta z\, s\varphi\, s\psi - F_{z0} \Delta z\, c\varphi\, c\psi\, s\theta + F_{y0} \Delta z\, c\psi\, s\varphi\, s\theta + u u_0\, c\psi\, c\theta\, s\theta_0 - u u_0\, c\psi_0\, c\theta_0\, s\theta + u v_0\, c\varphi_0\, s\psi_0\, s\theta - u_0 v\, c\varphi\, s\psi\, s\theta_0 - u w_0\, s\varphi_0\, s\psi_0\, s\theta + u_0 w\, s\varphi\, s\psi\, s\theta_0 - u w_0\, c\varphi_0\, c\psi\, c\theta\, c\theta_0 + u_0 w\, c\varphi\, c\psi_0\, c\theta\, c\theta_0 + v w_0\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\theta_0\, s\psi - v_0 w\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\theta\, s\psi_0 - u v_0\, c\psi\, c\theta\, c\theta_0\, s\varphi_0 + u_0 v\, c\psi_0\, c\theta\, c\theta_0\, s\varphi + v v_0\, c\varphi\, c\theta_0\, s\varphi_0\, s\psi - v v_0\, c\varphi_0\, c\theta\, s\varphi\, s\psi_0 + w w_0\, c\varphi\, c\theta\, s\varphi_0\, s\psi_0 - w w_0\, c\varphi_0\, c\theta_0\, s\varphi\, s\psi - u w_0\, c\varphi_0\, c\psi_0\, s\theta\, s\theta_0 + u_0 w\, c\varphi\, c\psi\, s\theta\, s\theta_0 + v w_0\, c\theta\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\psi_0 - v_0 w\, c\theta_0\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\psi - u v_0\, c\psi_0\, s\varphi_0\, s\theta\, s\theta_0 + u_0 v\, c\psi\, s\varphi\, s\theta\, s\theta_0 - w w_0\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\psi\, c\theta_0\, s\theta + w w_0\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\psi_0\, c\theta\, s\theta_0 - v w_0\, c\varphi_0\, c\psi\, c\theta_0\, s\varphi\, s\theta + v w_0\, c\varphi_0\, c\psi_0\, c\theta\, s\varphi\, s\theta_0 - v_0 w\, c\varphi\, c\psi\, c\theta_0\, s\varphi_0\, s\theta + v_0 w\, c\varphi\, c\psi_0\, c\theta\, s\varphi_0\, s\theta_0 - v v_0 c\psi\, c\theta_0\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\theta + v v_0\, c\psi_0\, c\theta\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\theta_0$$

$$H_3 = F_{z0} \Delta x\, c\psi\, s\varphi + F_x \Delta y\, c\psi\, c\theta + F_{y0} \Delta x\, c\varphi\, c\psi + F_{y0} \Delta y\, c\varphi\, s\psi - F_x \Delta x\, c\theta s\psi + F_{z0} \Delta y\, s\varphi\, s\psi + F_{z0} \Delta y\, c\varphi\, c\psi\, s\theta - F_{z0} \Delta x\, c\varphi\, s\psi\, s\theta - F_{y0} \Delta y\, c\psi\, s\varphi\, s\theta + F_{y0} \Delta x\, s\varphi\, s\psi\, s\theta + 2\Delta x g\, c\varphi\, c\psi\, c\theta\, s\varphi + u v_0\, c\varphi_0\, c\psi\, c\psi_0\, c\theta - u_0 v\, c\varphi\, c\psi\, c\psi_0\, c\theta_0 + v v_0\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\psi\, s\psi_0 - v v_0\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\psi_0\, s\psi + u w_0\, c\psi\, c\psi_0\, c\theta\, s\varphi_0 - u_0 w\, c\psi\, c\psi_0\, c\theta_0\, s\varphi - v w_0\, c\varphi\, c\psi\, s\varphi_0\, s\psi_0 - v w_0\, c\varphi\, c\psi_0\, s\varphi_0\, s\psi + v_0 w\, c\varphi_0\, c\psi\, s\varphi\, s\psi_0 + v_0 w\, c\varphi_0\, c\psi_0\, s\varphi\, s\psi + u u_0\, c\psi\, c\theta\, c\theta_0\, s\psi_0 - u u_0\, c\psi_0\, c\theta\, c\theta_0\, s\psi + u v_0\, c\varphi_0\, c\theta\, s\psi\, s\psi_0 - u_0 v\, c\varphi\, c\theta_0\, s\psi\, s\psi_0 - w w_0\, c\psi\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\psi_0 + w w_0\, c\psi_0\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\psi - u w_0\, c\theta\, s\varphi_0\, s\psi\, s\psi_0 + u_0 w\, c\theta_0\, s\varphi\, s\psi\, s\psi_0 - v w_0\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\psi\, c\psi_0\, s\theta_0 + v_0 w\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\psi\, c\psi_0\, s\theta - v v_0\, c\varphi\, c\psi\, c\psi_0\, s\varphi_0\, s\theta_0 + v v_0\, c\varphi_0\, c\psi\, c\psi_0\, s\varphi\, s\theta + w w_0\, c\varphi\, c\psi\, c\psi_0\, s\varphi_0\, s\theta - w w_0\, c\varphi_0\, c\psi\, c\psi_0\, s\varphi\, s\theta_0 + u w_0\, c\varphi_0\, c\psi\, c\theta\, s\psi_0\, s\theta_0 - u w_0\, c\varphi_0\, c\psi_0\, c\theta\, s\psi\, s\theta_0 + u_0 w\, c\varphi\, c\psi\, c\theta_0\, s\psi_0\, s\theta - u_0 w\, c\varphi\, c\psi_0\, c\theta_0\, s\psi\, s\theta - v w_0\, c\varphi\, c\varphi_0\, s\psi\, s\psi_0\, s\theta_0 + v w_0\, c\psi\, c\psi_0\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\theta + v_0 w\, c\varphi\, c\varphi_0\, s\psi\, s\psi_0\, s\theta - v_0 w\, c\psi\, c\psi_0\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\theta_0 + u v_0\, c\psi\, c\theta\, s\varphi_0\, s\psi_0\, s\theta_0 - u v_0\, c\psi_0\, c\theta\, s\varphi_0\, s\psi\, s\theta_0 + u_0 v\, c\psi\, c\theta_0\, s\varphi\, s\psi_0\, s\theta - u_0 v\, c\psi_0\, c\theta_0\, s\varphi\, s\psi\, s\theta - v v_0\, c\varphi\, s\varphi_0\, s\psi\, s\psi_0\, s\theta_0 + v v_0\, c\varphi_0\, s\varphi\, s\psi\, s\psi_0\, s\theta - w w_0\, c\varphi\, s\varphi_0\, s\psi\, s\psi_0\, s\theta + w w_0\, c\varphi_0\, s\varphi\, s\psi\, s\psi_0\, s\theta_0 - v w_0\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\psi\, s\psi_0\, s\theta + v_0 w\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\psi\, s\psi_0\, s\theta_0 + w w_0\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\psi\, s\psi_0\, s\theta\, s\theta_0 - w w_0\, c\varphi\, c\varphi_0\, c\psi_0\, s\psi\, s\theta\, s\theta_0 + v w_0\, c\varphi_0\, c\psi\, s\varphi\, s\psi_0\, s\theta\, s\theta_0 - v w_0\, c\varphi_0\, c\psi_0\, s\varphi\, s\psi\, s\theta\, s\theta_0 + v_0 w\, c\varphi\, c\psi\, s\varphi_0\, s\psi_0\, s\theta\, s\theta_0 - v_0 w\, c\varphi\, c\psi_0\, s\varphi_0\, s\psi\, s\theta\, s\theta_0 + v v_0\, c\psi\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\psi_0\, s\theta\, s\theta_0 - v v_0\, c\psi_0\, s\varphi\, s\varphi_0\, s\psi\, s\theta\, s\theta_0).$$

У формулах (18)-(19) використані скорочення: через $c\varphi$ позначається $\cos\varphi$, через $s\varphi$ позначається $\sin\varphi$, через $c^2\varphi$ позначається $\cos^2\varphi$. Для інших кутів скорочення мають аналогічний сенс.

Для обчислення величин у формулах (18)-(19) було використано специфічні функції Matlab: syms, що створює символьні змінні; simplify, яка спрощує різні типи символьних виразів; cross, яка обчислює векторний добуток двох векторів, зокрема у символьному вигляді. Код відповідного m-файла, за допомогою якого були отримані формули (18) і (19), наведено у [10].

Слідуючи [3], додамо у праву частину системи (17) функції Δ і $\boldsymbol{P}$, які відповідають за збурення та варіації параметрів системи таких, наприклад, як маса, момент інерції тощо. Отримаємо систему, яка робить нашу модель руху планерів більш відповідною реальності:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = G(I_3 + \Delta)\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{H} + \boldsymbol{P}, \tag{20}$$

де щодо функцій Δ і $\boldsymbol{P}$ робляться такі припущення:

Припущення 3. *Припускається, що існують додатні числа ν і γ такі, що на множині $\mathcal{M}_\nu = \{\boldsymbol{\varepsilon} \| \|\boldsymbol{\varepsilon}\| < \nu\}$ виконується нерівність:*

$$\|G\Delta G^{-1}\| \leq 1 - \nu. \tag{21}$$

На першому етапі побудови керування вектор кутової швидкості $\boldsymbol{\Omega}$ розглядається у системі (17) як керування. І задача цього етапу полягає в тому, щоб знайти такий закон зміни $\boldsymbol{\Omega}$, який позначимо через $\boldsymbol{\Omega}^d(p^d, q^d, r^d)$, та відповідну компактну, інваріантну відносно t множину $\Lambda \subset \mathcal{M}_\nu$ (тобто, така що усі розв'язки системи (20), які починаються в Λ, там і залишаються при всіх $t \geq 0$), при яких $\boldsymbol{\varepsilon}$, що задовольняє рівняння (20), прямувало би асимптотично до 0. При цьому компоненти керування $\boldsymbol{u_1}$, тобто величини $\delta_a, \delta_e, \delta_r$ виконують роль збурень.

На другому етапі розглядається система $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = f(\boldsymbol{\Omega}) + C\boldsymbol{u_1}$ з (11), яка описує зміну вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\Omega}$. Задача другого етапу полягає в тому, щоб побудувати такий закон зміни керування $\boldsymbol{u_1}$, який позначимо через $\boldsymbol{u_1^d} = (\delta_a^d, \delta_e^d, \delta_r^d)$, при якому компоненти $\boldsymbol{\Omega}$, тобто величини p, q, r, прямували би асимптотично до p^d, q^d, r^d.

Два етапи, описані вище, можна проілюструвати схемою на рис. 5.

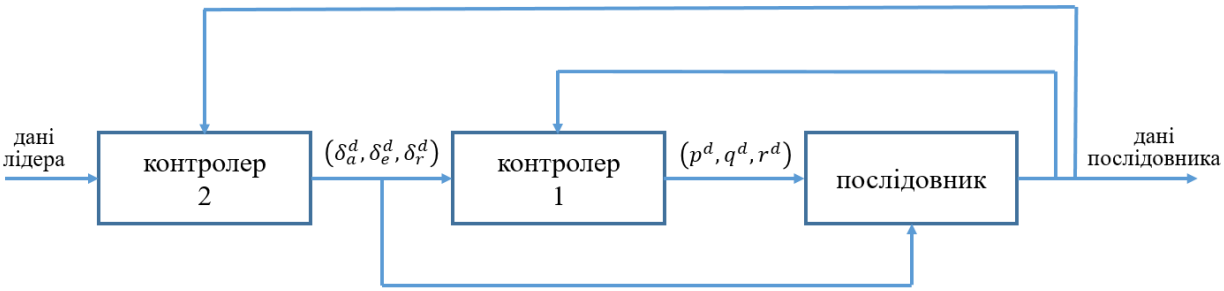


Рис. 5. Схема, яка ілюструє двоетапний процес побудови керування. Контролер 1 позначає синтез керування на першому етапі, а контролер 2 – синтез керування на другому етапі.

Fig. 5. Schematic illustrating the two-stage control designing process. Controller 1 denotes the control synthesis in the first stage, and controller 2 denotes the control synthesis in the second stage.

3.3. Побудова внутрішнього контуру керування

Далі описується побудова першого контролера. Побудова другого у даній статті не розглядається. Керування для першого контролера будемо синтезувати, виходячи з принципу керування ковзним режимом (sliding mode control principle), основи якого викладені у монографії [7] і статті [12], та використовуючи підхід, запропонований у роботі [3]. Відповідно до цього, синтез будемо виконувати у два кроки.

Перед тим, як розпочати перший крок, зробимо припущення.

Припущення 4. *Планеру-послідовнику відомі значення усіх параметрів, які входять у матрицю G та вектор $\boldsymbol{H}$.*

На першому кроці визначимо зворотній зв'язок $\boldsymbol{\Omega}^d$ за формулою:

$$\boldsymbol{\Omega}^d = -G^{-1}\big(\boldsymbol{H} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}}\big), \tag{22}$$

де $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}}$ – нове керування, і застосуємо його до системи (20):

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= -G(I_3 + \Delta)G^{-1}\big(\boldsymbol{H} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}}\big) + \boldsymbol{H} + \boldsymbol{P} = -(I_3 + G\Delta G^{-1})\big(\boldsymbol{H} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}}\big) + \boldsymbol{H} + \boldsymbol{P} \\ &= -\boldsymbol{H} - G\Delta G^{-1}\boldsymbol{H} - (I_3 + G\Delta G^{-1})\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{H} + \boldsymbol{P} \\ &= -G\Delta G^{-1}\boldsymbol{H} - (I_3 + G\Delta G^{-1})\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{P}.\end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо задачу про стабілізацію нульового стану рівноваги системи:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -G\Delta G^{-1}\boldsymbol{H} - (I_3 + G\Delta G^{-1})\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{P}. \tag{23}$$

На другому кроці, виходячи з принципу керування ковзним режимом, побудуємо керування $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}}$, яке має розв'язати цю задачу. Для цього визначимо ковзну змінну $\boldsymbol{s}$:

$$\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t) + K \cdot \boldsymbol{d}(t), \tag{24}$$

де $K \in R^{3\times 3}$ – діагональна матриця з відмінними від 0 діагональними елементами k_1, k_2, k_3; $\boldsymbol{d}(t)$ – додаткова змінна, що є розв'язком задачі Коші:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{d}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t) \\ \boldsymbol{d}(0) = -K^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(0) \end{cases} \tag{25}$$

Тепер керування $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}}$ визначимо так:

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}} = K\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \cdot sign\,(\boldsymbol{s}), \tag{26}$$

де функція $sign\,(\boldsymbol{s})$ визначена так: $sign\,(\boldsymbol{s}) = [sign\,(s_1),\ sign\,(s_2),\ sign\,(s_3)]^T$; λ – дійсний параметр, що визначається за формулою:

$$\lambda = \frac{\rho+\eta}{\gamma}, \tag{27}$$

з константою $\eta > 0$ та $\gamma \geq \max\limits_{\boldsymbol{\varepsilon}\in\mathcal{M}_\nu} \|G\Delta G^{-1}(\boldsymbol{H} - K\boldsymbol{\varepsilon})\| + \|\boldsymbol{P}\|$. При цьому приймається наступна гіпотеза.

Гіпотеза 1. *Для всіх значень змінних, від яких залежать елементи матриці G, що визначаються формулами (18), матриця G – невироджена.*

Наступна теорема доводить, що за певних умов існують такі значення матриці K та параметра η, при яких керування $\boldsymbol{\Omega}^d$, визначене формулами (22), (26), (27) з ковзною змінною, визначеною формулами (24)-(25), забезпечує асимптотичне прямування $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ до нуля.

Теорема 1. *За Припущень 1-3 та Гіпотези 1 існує така матриця K, що керування, визначене формулами (22), (26) та (27), з ковзною змінною, визначеною формулами (24)-(25), забезпечує такий рух планера-послідовника, при якому асимптотично прямує до нуля величина $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, яка є мірою відхилення вектора швидкості $\boldsymbol{v}$ планера-послідовника від вектора $\boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{X_0} - \boldsymbol{X}$.*

Доведення. Розглянемо функцію $V = \frac{1}{2}\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}$, де $\boldsymbol{s}$ визначена формулами (24)-(25), і знайдемо похідну V вздовж траєкторії системи (20), до якої застосовані вказані в умові теореми керування. Спочатку за формулою похідної складної функції отримаємо:

$$\dot{V}\big|_{(20)} = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{s}}^T\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}^T\dot{\boldsymbol{s}}) = \boldsymbol{s}^T\dot{\boldsymbol{s}}.$$

Далі враховуємо формулу (24):

$$\dot{V}\big|_{(20)} = \boldsymbol{s}^T\big(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + K\dot{\boldsymbol{d}}\big).$$

Використаємо формули (25), що визначають функцію d:

$$\dot{V}\big|_{(20)} = \boldsymbol{s}^T(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + K\boldsymbol{\varepsilon}).$$

Оскільки похідна V обчислюється вздовж траєкторії системи (20), до якої застосовані вказані керування, то у одержаній формулі $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ дорівнює правій частині системи (23), де $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}}$ визначається формулою (26). Враховуючи це, одержимо далі:

$$\dot{V}\big|_{(20)} = \boldsymbol{s}^T\left(-G\Delta G^{-1}\boldsymbol{H} - (I_3 + G\Delta G^{-1})\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{P} + K\boldsymbol{\varepsilon}\right)$$
$$= \boldsymbol{s}^T\left(-G\Delta G^{-1}\boldsymbol{H} - \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}} - G\Delta G^{-1}\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{P} + K\boldsymbol{\varepsilon}\right)$$
$$= \boldsymbol{s}^T\left(-G\Delta G^{-1}\boldsymbol{H} - \left(K\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \cdot sign\,(\boldsymbol{s})\right) - G\Delta G^{-1}\left(K\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \cdot sign\,(\boldsymbol{s})\right) + \boldsymbol{P} + K\boldsymbol{\varepsilon}\right)$$
$$= -\lambda \boldsymbol{s}^T \cdot sign\,(\boldsymbol{s}) - \lambda \boldsymbol{s}^T G\Delta G^{-1} \cdot sign\,(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{s}^T G\Delta G^{-1}(\boldsymbol{H} + K\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{P}.$$

Оцінимо окремо вираз $\boldsymbol{s}^T sign(\boldsymbol{s})$:

$$\boldsymbol{s}^T sign\,(\boldsymbol{s}) = s_1 \cdot sign\,(s_1) + s_2 \cdot sign\,(s_2) + s_3 \cdot sign\,(s_3)$$
$$= |s_1| + |s_2| + |s_3| \geq \sqrt{|s_1|^2 + |s_2|^2 + |s_3|^2} = \|\boldsymbol{s}\|.$$

Враховуючи цю оцінку, отримаємо оцінку для $\dot{V}\big|_{(20)}$:

$$\dot{V}\big|_{(20)} \leq -\lambda \cdot \|\boldsymbol{s}\| + \lambda \cdot \|G\Delta G^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{s}\| + \|\boldsymbol{s}\| \cdot \|G\Delta G^{-1}(\boldsymbol{H} - K\boldsymbol{\varepsilon})\| + \|\boldsymbol{s}\| \cdot \|\boldsymbol{P}\| =$$
$$-\lambda \cdot \|\boldsymbol{s}\| + \lambda \cdot \|G\Delta G^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{s}\| + (\|G\Delta G^{-1}(\boldsymbol{H} - K\boldsymbol{\varepsilon})\| + \|\boldsymbol{P}\|) \cdot \|\boldsymbol{s}\|.$$

Враховуючи Припущення 3 та формулу (27), одержимо далі:

$$\dot{V}\big|_{(20)} \leq -\lambda \cdot \|\boldsymbol{s}\| + \lambda(1-\gamma) \cdot \|\boldsymbol{s}\| + \|\boldsymbol{s}\| \cdot \rho = -\lambda\gamma\|\boldsymbol{s}\| + \rho\|\boldsymbol{s}\| = \left(-\frac{\rho+\eta}{\gamma}\gamma + \rho\right)\|\boldsymbol{s}\| =$$
$$-\eta\|\boldsymbol{s}\|.$$

Отримана оцінка гарантує, що всі траєкторії системи (20) досягають поверхні ковзання.

Диференціюючи по t рівність (24) і враховуючи формулу (25), отримуємо рівняння, що описує ковзну динаміку:

$$\dot{\boldsymbol{s}}(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) + K \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t). \tag{28}$$

Для того, щоб отримати еквівалентне керування $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{eq}}$ у ковзному режимі, необхідно покласти $\dot{\boldsymbol{s}} = 0$ і з отриманого рівняння виразити керування. Враховуючи (28), рівняння $\dot{\boldsymbol{s}} = 0$ можемо записати у вигляді:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) + K \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t) = 0,$$

і далі, враховуючи (23), у вигляді:

$$-G\Delta G^{-1}\boldsymbol{H} - (I_3 + G\Delta G^{-1})\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{P} + K \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0.$$

З отриманої рівності виражаємо $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}}$, яке і буде еквівалентним керуванням:

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{eq}} = (I_3 + G\Delta G^{-1})^{-1}(-G\Delta G^{-1}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{P} + K \cdot \boldsymbol{\varepsilon}).$$

Підставляючи у (23) еквівалентне керування $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{eq}}$, отримаємо рівняння, яке описує динаміку замкнутої системи у ковзному режимі:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -K \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{29}$$

Елементи матриці K вибираються таким чином, щоб розв'язок системи (29) був асимптотично стійким і множина Λ була позитивно-інваріантною відносно системи (23), тобто $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \in \Lambda$ для будь-яких $t \geq 0$. Теорему доведено.

4. Висновки

Стаття присвячена дослідженню системи, утвореної двома БПЛА планерного типу. Один з планерів є лідером, він рухається по траєкторії, на яку ми не можемо вплинути. Інший планер є послідовником, рух якого визначається керуваннями. Задача полягає в тому, щоб для послідовника побудувати таке керування, при якому послідовник слідував би за лідером. При цьому необхідно попередньо визначити умову слідування послідовника за лідером. В результаті проведеного дослідження:

1) Сформульовано умову слідування планера-послідовника за планером-лідером. Запропонована умова має вигляд (3).
2) Використовуючи принцип керування ковзним режимом, побудовано керування для планера-послідовника у вигляді закону зміни вектора його

кутової швидкості. Керування визначається формулами (22), (26), (27) з ковзною змінною, визначеною формулами (24), (25).

Дослідження може бути продовжене у декількох напрямках. Перший напрямок полягає у продовженні досліджень у рамках критерію слідування (3) і передбачає виконання таких кроків:

- перевірка Гіпотези 1 (доведення істинності або спростування).
- перевірка системи, яка описує зміну $\boldsymbol{\Omega}$, на керованість. Тобто, необхідно встановити чи будь-яке значення $\boldsymbol{\Omega_0}$ вектора $\boldsymbol{\Omega}$ може бути досягнуте, враховуючи обмеженість компонент δ_a, δ_e та δ_r керування $\boldsymbol{u_1}$.
- побудова керування $\boldsymbol{u_1}$ другого етапу (зовнішній контур керування).
- побудова комп'ютерної симуляції до задачі.

Другий напрямок полягає у побудові керувань, які забезпечують виконання умови слідування, що альтернативна умові (3). В якості цієї альтернативної може бути розглянута умова прямування кутів Ейлера планера-послідовника до значень кутів Ейлера планера-лідера та кута між векторами $\boldsymbol{r_0}(t) - \boldsymbol{r}(t)$ та $\boldsymbol{V}(t)$ до нуля, тобто:

$$\varphi(t) \to \varphi_0(t), \theta(t) \to \theta_0(t), \psi(t) \to \psi_0(t), \angle\big(\boldsymbol{r_0}(t) - \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{V}(t)\big) \to 0, \quad (30)$$

при $t \to \infty$. При такій меті керування не потрібно робити Припущення 1 і 2, що знімає обмеження на рух планерів. Однак, така система може бути не керованою в тому сенсі, що кількість параметрів керування три (змінні δ_a, δ_e і δ_r), а змінних, якими треба керувати, більше – чотири (змінні φ, θ, ψ та σ). Але є гіпотеза, що кути φ, θ, ψ та σ утворюють залежну (наприклад, лінійно) систему, а тому існують три такі кути, позначимо їх через ρ_1, ρ_2, ρ_3, через які виражаються φ, θ, ψ та σ. Якщо гіпотеза істинна, то умову (30) можна замінити на еквівалентну:

$$\rho_1(t) \to \bar{\rho}_1(t), \rho_2(t) \to \bar{\rho}_2(t), \rho_3(t) \to \bar{\rho}_3(t), \quad (31)$$

при $t \to \infty$ ($\bar{\rho}_1(t)$, $\bar{\rho}_2(t)$, $\bar{\rho}_3(t)$ – відомі функції або константи), що означає, що змінних, якими треба керувати, стільки ж, стільки і параметрів керування. Таким чином, в подальшому актуально підтвердити чи спростувати згадану гіпотезу, і у випадку її істинності побудувати керування, яке забезпечує виконання умови (31).

Список використаної літератури:

1. РФ застосувала проти України нові плануючі 1500-кг бомби УПАБ-1500В: нова й доволі вагома загроза // Defence Express : веб-сайт. URL: https://defence-ua.com/weapon_and_tech/rf_zastosuvala_proti_ukrajini_novi_planujuchi_1500_kg_bombi_upab_1500v_nova_j_dovoli_vagoma_zagroza-10836.html (дата звернення: 10.08.2023).
2. Attallah A. S. Attitude control of gliding bomb using classical PID and modified PI-D controllers / A. S. Attallah, A. T. Hafez, G. A. EL-Sheikh, A. S. Mohammady // *Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST). – 2016.* – Vol. 55. – P. 4451-4456.
3. Defoort M. Sliding-mode formation control for cooperative autonomous mobile robots / M. Defoort, T. Floquet, A. Kokosy, W. Perruquetti // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2008. – Vol. 55, № 11. – P. 3944-3953.
4. Elandy I. H. Modeling and simulation of an aerial gliding body in free-fall / A. N. Ouda, A. M. Kamel, Y. Z. Elhalwagy // *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT). – 2018.* – Vol. 7. – P. 135-142.
5. Geng L. Application of Maximum Principle with Final State Constraints in Gliding Control for Guided Bombs / L. Geng, Z. Zheng // *2007 IEEE International Conference on Automation and Logistics. – 2007.* – P. 205-209.

6. Ground Launched Small Diameter Bomb // Wikipedia : веб-сайт. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Ground_Launched_Small_Diameter_Bomb (дата звернення: 20.11.2023).
7. Khalil H. K. Nonlinear systems. Third edition // Department of Electrical and Computer Engineering Michigan State University. – 2002.
8. Liang Z. Trajectory planning for cooperative flight of two hypersonic entry vehicles / Z. Liang, J. Yu, Z. Ren, Q. Li // In *21st AIAA International Space Planes and Hypersonics Technologies Conference. – 2017.* – P. 2251
9. Lim S. Guidance to control arrival angle and altitude for an unpowered aerial vehicle / S. Lim, S. Cho, E. Lee // *International Journal of Aeronautical and Space Sciences. – 2020.* – Vol. 21, № 1. – P. 1-28.
10. mag.m. URL: https://drive.google.com/file/d/1p3j5OxqjVSLvWAuhTwVvi-MiWvx19TA8/view?usp=sharing (дата звернення: 07.09.2023).
11. Mohamed M. I. Modeling, simulation and attitude control of an aerial gliding vehicle / M. I. Mohamed, E. Safwat, A. M. Kamel // 13th International Conference on Electrical Engineering ICEENG. – 2022. – P. 23-26.
12. Sliding Mode Control // MathWorks : веб-сайт. URL: https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/design-sliding-mode-control-reaching-law.html?searchHighlight=sliding%20mode%20control&s_tid=srchtitle_support_results_3_sliding%2520mode%2520control (дата звернення: 07.07.2023).
13. Wang X. Three-dimensional cooperative guidance and control law for multiple reentry missiles with time-varying velocities / X. Wang, Y. Zhang, D. Liu, M. He // *Aerospace Science and Technology. – 2018.* – Vol. 80. – P. 127-143.
14. Zhang Y. A globally fixed-time solution of distributed formation control for multiple hypersonic gliding vehicles / Y. A. Zhang, X. Wang, S. Tang // *Aerospace Science and Technology*. – 2020. – Vol. 98, № 5. – 105643.

References:

1. RF zastosuvala proty Ukrainy novi planuiuchi 1500-kh bomby UPAB-1500V: nova y dovoli vahoma zahroza // Defence Express : veb-sait. URL: https://defence-ua.com/weapon_and_tech/rf_zastosuvala_proti_ukrajini_novi_planujuchi_1500_kg_bombi_upab_1500v_nova_j_dovoli_vagoma_zagroza-10836.html (date of application: 10.08.2023).
2. Attallah, A. S., Hafez, A. T., EL-Sheikh, G. A., & Mohammady, A. S. (2016). Attitude control of gliding bomb using classical PID and modified PI-D controllers. *differential equations*, *1*, 10.
3. Defoort, M., Floquet, T., Kokosy, A., & Perruquetti, W. (2008). Sliding-mode formation control for cooperative autonomous mobile robots. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, *55*(11), 3944-3953.
4. Elandy, I. H., Ouda, A. N., Kamel, A. M., & Elhalwagy, Y. Z. (2018). Modeling and simulation of an aerial gliding body in free-fall. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT), ISSN*, 2278-0181.
5. Geng, L., & Zheng, Z. (2007, August). Application of Maximum Principle with Final State Constraints in Gliding Control for Guided Bombs. In *2007 IEEE International Conference on Automation and Logistics* (pp. 205-209). IEEE.
6. Ground Launched Small Diameter Bomb // Wikipediia : veb-sait. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Ground_Launched_Small_Diameter_Bomb (date of application: 20.11.2023).
7. Khalil, H. K. (2002). Nonlinear systems third edition.(2002).

8. Liang, Z., Yu, J., Ren, Z., & Li, Q. (2017). Trajectory planning for cooperative flight of two hypersonic entry vehicles. In *21st AIAA International Space Planes and Hypersonics Technologies Conference* (p. 2251).
9. Lim, S., Cho, S., & Lee, E. (2020). Guidance to control arrival angle and altitude for an unpowered aerial vehicle. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 1-28. mag.m. URL: https://drive.google.com/file/d/1p3j5OxqjVSLvWAuhTwVvi-MiWvx19TA8/view?usp=sharing (date of application: 07.09.2023).
10. Mohamed, M. I., Safwat, E., & Kamel, A. M. (2022, March). Modeling, simulation and attitude control of an aerial gliding vehicle. In *2022 13th International Conference on Electrical Engineering (ICEENG)* (pp. 23-26). IEEE.
11. Sliding Mode Control // MathWorks : veb-sait. URL: https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/design-sliding-mode-control-reaching-law.html?searchHighlight=sliding%20mode%20control&s_tid=srchtitle_support_results_3_sliding%2520mode%2520control (date of application: 07.07.2023).
12. Wang, X., Zhang, Y., Liu, D., & He, M. (2018). Three-dimensional cooperative guidance and control law for multiple reentry missiles with time-varying velocities. *Aerospace Science and Technology*, *80*, 127-143.
13. Zhang, Y., Wang, X., & Tang, S. (2020). A globally fixed-time solution of distributed formation control for multiple hypersonic gliding vehicles. *Aerospace Science and Technology*, *98*, 105643.

S. V. BABENKO
Ph.D., senior lecturer, Bohdan Khmelnytsky National University Of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,
differenceeq@vu.cdu.edu.ua

A. V. HONCHARENKO
Master's student, Bohdan Khmelnytsky National University Of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,
honcharenko.anna1619@vu.cdu.edu.ua

"LEADER-FOLLOWER TRACKING CONTROL FOR GLIDING UAVs SYSTEM"

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-3-20 PACS: 89.20.Bb, 07.90+c

In the paper a system formed by two glider-type UAVs is considered. Guided bombs are examples of such UAVs (for example, the GBU bomb manufactured by Boeing). The specificity of glider UAVs is that they fly not with the help of engines, as rockets, airplanes or helicopters do, but exclusively under the action of gravity and aerodynamic forces caused by the geometry of the object (the presence of wings).

One of the system gliders plays the role of a leader, that is, it is controlled automatically according to a given algorithm or it is controlled by an operator. It is assumed that the leader's task is to hit a specific target on Earth. The second glider of the system is a follower, for which it is possible to build automatic control. The task is to find such control for the follower, with the help of which it would track the leader in such a way as to hit the target that the leader is oriented towards. To find such control, the condition for tracking the leader by the follower is formulated in the first part of the paper. Namely, tracking the leader means such movement of the follower, in which at least one of the following conditions is met: 1)

the velocity vector $\boldsymbol{V}$ of the follower and the vector $\boldsymbol{r_0 - r}$ ($\boldsymbol{r_0}$ and $\boldsymbol{r}$ denote the radius vectors of the leader's and follower's centers of mass, respectively) are co-directed, 2) the positions of the follower and the leader coincide. In the second part of the paper, based on the differential equations of motion, an equation for the error is derived, which is taken to be the vector product of the vectors $\boldsymbol{r_0 - r}$ and $\boldsymbol{V}$. It is shown that under certain assumptions, the the error is equil to zero if and only if the follower tracks the leader. Based on the equations for the error, using the principle of sliding mode control, a control for the follower glider is constructed in the form of a law of change of its angular velocity vector.

Keywords: gliding UAV, leader-follower tracking, control, sliding mode, Matlab.

Одержано редакцією 23.09.2024
Прийнято до друку 01.11.2024

ORCID: 0000-0002-9540-773X
В. А. ГАВРИШ
керівник гуртка інформатики в позашкільному навчальному закладі «Центр дитячої та юнацької творчості м. Черкаси», м. Черкаси, Україна.
Магістр фізики, Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, Черкаси, Україна, vagavrish@ukr.net

ORCID: : 0000-0002-3476-6747
В. С. ДЕНИСЕНКО
кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри моделювання економіки і бізнесу, Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, Черкаси, Україна, denvikstab@vu.cdu.edu.ua

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-21-36 PACS: 05.45.-a, 05.45.Tp, 05.45.Df, 05.10.-a, 05.45.Pq

ОЦІНКА КОРЕЛЯЦІЙНОЇ РОЗМІРНОСТІ АТРАКТОРІВ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ МАТРИЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ (CDM - МЕТОД)

У роботі досліджено методи оцінювання кореляційної розмірності атракторів динамічних систем, що є інваріантною мірою неоднорідності фрактальної структури атракторів. На основі алгоритму Грасбергера–Прокачча було розроблено та протестовано метод обчислення кореляційної розмірності на основі матричних обчислень, що передбачає побудову матриці відстаней між точками атрактора у фазовому просторі. Алгоритм включає сортування цієї матриці та аналіз графіка логарифмічної залежності. Розроблені методи були застосовані до «еталонних» атракторів: логістичне відображення, відображення Енона, атрактори Каплана–Йорка, Заславського, системи Лоренца, Ресслера та Рабіновича–Фабриканта. Це дозволило підтвердити теоретичні аспекти експериментальними результатами. Завдяки застосуванню матричних обчислень вдалося досягти не лише підвищення швидкості виконання розрахунків, але й точності оцінок, оскільки метод враховує всі точки атрактора. Описані методи можуть бути застосовані до широкого класу задач фізичної та економічної динаміки.

Ключові слова: кореляційна розмірність, атрактори, фазовий простір, динамічні моделі, матриця відстаней, метод Грасбергера–Прокачча, фрактальна структура, хаос.

2. Вступ та постановка завдання

Розглянемо динамічну систему, яка описується диференціальним рівнянням [1]:

$$\dot{x}_t = g(x_t), \tag{1}$$

де $g: R^m \to R^m$, $x_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(m)}) \in R^m$. Отримані розв'язки рівняння (1) дозволяють побудувати фазову траєкторію динамічної системи. В цьому випадку, згідно класичних уявлень, така математична модель може передбачити еволюцію системи на достатньо великий проміжок часу. Однак, дослідження проведені в кінці минулого століття показали, що дуже часто така система демонструє хаотичну і непередбачувану поведінку. Як правило, до хаотичної поведінки призводить наявність в системі дисипація енергії чи зворотній зв'язок, але в окремих випадках хаос може виникати і в консервативних системах. За фазовою траєкторією можна побудувати

атрактор – множина в фазовому просторі динамічної системи, до якої прямують траєкторії системи після достатньо тривалого часу, незалежно від початкових умов. Дуже часто такі атрактори збігаються до обмеженої множини: однієї точки – такий атрактор називають точковим, або ж до замкнутої кривої –граничний цикл. У багатьох випадках еволюція динамічної системи асимптотично збігається до такого набору точок у фазовому просторі, який і називається атрактором. Для прикладу, розглянемо затухаючий гармонічний осцилятор, що описується рівнянням:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \vartheta \frac{dx}{dt} + \omega^2 t = 0, \quad (2)$$

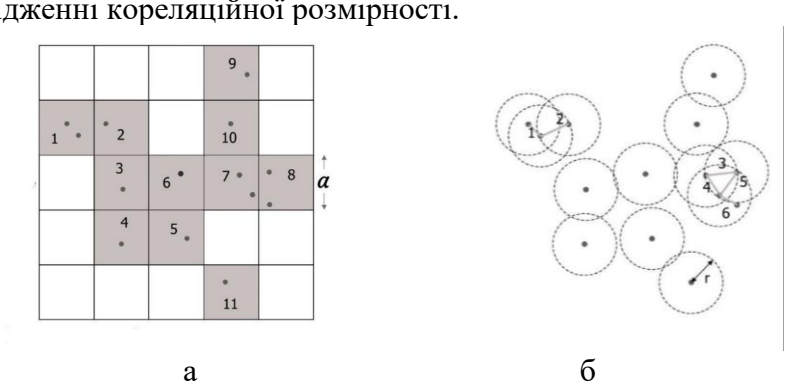
де ϑ – параметр затухання, що визначається тертям, а ω – циклічна частота осцилятора. Тоді атрактор можна задати двовимірним фазовим простором з набором $x_t^{(1)} = x$, $x_t^{(2)} = dx/dt$. В цьому випадку динаміка системи асимптотично наближається до точки $x_t^{(1)} = 0$, $x_t^{(2)} = 0$, яку можна вважати атрактором, що складається лише з однієї точки і тому має нульову розмірність. Ця точка є стійким атрактором, оскільки всі траєкторії в її околі збігаються до неї з часом.

Дуже часто, при певних параметрах, форма атрактора динамічної системи має вигляд фрактальної фігури. Такі атрактори називають дивними (strange attractor) і вони, як правило, виникають у випадку наявності в системі хаотичної динаміки. Наприклад, нелінійний осцилятор Ван дер Поля (Van der Pol, 1920) [2]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - \eta)\frac{dx}{dt} + \omega^2 t = 0, \quad (3)$$

де η – константа, демонструє поведінку, характерну для систем зі зворотними зв'язками. Орбіта цієї системи у фазовому просторі може мати фрактальну структуру, що є ознакою режиму хаосу.

Поняття фрактальності включає дробову розмірність, що є характерною для просторової топології атракторів таких систем. Тобто, при визначенні фрактальних характеристик дивних атракторів розмірність Хаусдорфа-Безиковича (Hausdorff and Besicovitch) [3, 4] не є цілим числом. Існує кілька способів оцінки фрактальної розмірності, що відрізняються за методикою та початковими теоретичними уявленнями і, як правило, дають схожі оцінки цієї характеристики. Так, існують точкова, інформаційна та кореляційна розмірності, які можуть бути отримані безпосередньо з узагальненої ентропії Реньї [5]. Однак, в рамках цієї статті ми зосереджуємося виключно на дослідженні кореляційної розмірності.



а б

Рис. 1. Оцінка фрактальної розмірності атрактора: а – за допомогою бокс-методу, розбиття фазового простору на прямокутники; б – метод Грасбергера-Прокачча, використання рухомих сфер.

Fig. 1. Estimation of the fractal dimension of an attractor: (a) using the box-counting method, dividing the phase space into rectangles; (b) the Grassberger-Procaccia method, employing moving spheres.

Фрактальну розмірність можна оцінити за допомогою бокс-методу (box-counting method) [6]. Цей метод є одним із найпоширеніших підходів для визначення фрактальної розмірності атракторів та фрактальних об'єктів. У бокс-методі фазовий простір атрактора поділений сіткою прямокутників (боксів) з однаковими розмірами, як на рис. 1а. Необхідно знайти кількість боксів, що покривають усі точки атрактора. При зменшенні розміру боксів їх кількість зростає, щоб повністю покрити атрактор.

Залежність кількості прямокутників від розміру прямокутника для простору довільної розмірності можна записати, як

$$P(a) \sim a^{-d}, \tag{4}$$

де $P(a)$ – кількість прямокутників необхідних для покриття атрактора, a – довжина ребра прямокутника. Співвідношення (4) випливає з тих міркувань, що при зменшенні довжини ребра a, кількість прямокутників, необхідних для покриття атрактора, збільшується пропорційно $1/a^d$, де d – фрактальна розмірність.

З формули (4) можна отримати оцінку фрактальної розмірності d, якщо прологарифмувати обидві частини та взяти границю:

$$d = -\lim_{a \to 0} \frac{log\, P(a)}{log\, a}. \tag{5}$$

Обчислити значення d за формулою (5) можна, знайшовши кутовий коефіцієнт нахилу прямолінійної ділянки кривої залежності $log\, P(a)$ від $log\, a$. Такі криві, як суцільна лінія будуть мати фрактальну розмірність рівну 1. Більш складі фігури, такі як атрактори, можуть мати розмірність більше 1. Як правило, це значення є дробовим і меншим розмірності простору в якому побудовано (вкладено) цей атрактор. Розмірність такого простору називають розмірністю вкладення (embedding dimension).

Хоча бокс-метод є досить простим та інтуїтивно зрозумілим, він не є достатньо ефективним, особливо для складних фрактальних структур та великих наборів даних. Принципово іншим підходом є метод Грасбергера-Прокачча (P. Grassberger and I. Procaccia) [7], що дає змогу визначити фрактальну розмірність на основі кореляційної функції за формулою:

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \Theta\left(r - \left\|Y_i - Y_j\right\|\right), \tag{6}$$

де N – кількість точок атрактора, Y_i та Y_j – вектори, дві точки атрактора у фазовому просторі, Θ – функція Гевісайда, $\|*\|$ – евклідова норма, r – радіус рухомої сфери.

Фрактальну розмірність, що знаходять на основі формули (6) називають кореляційною розмірністю. Цей метод ще називають методом рухомих сфер. Для цього, для заданого радіуса рухомої сфери (рис. 1б) обчислюють кількість усіх пар точок, що знаходяться в межах радіуса цієї сфери та ділять на кількість усіх можливих пар точок. Потім, радіус збільшується і обчислення повторюються для нового радіуса. Кореляційна функція (6) описує ймовірність того, що дві точки фазового простору знаходяться на відстані r одна від одної. З формули (6) виникає необхідність обчислювати відстані між точками атрактора «кожна з кожною», знаходити кількість пар, що потрапили в межі рухомої сфери та ділити на кількість усіх можливих пар точок, щоб отримати ймовірність. Такий підхід містить значну кількість обчислень, що вимагає застосування вкладених циклів. Крім того, передбачається багаторазове обчислення за формулою (6) для різних значень радіуса, що збільшується на фіксований крок.

Кореляційну розмірність у випадку (6) знаходять за формулою:

$$D_c = \lim_{r\to 0} \lim_{N\to\infty} \frac{\log C(r)}{\log r} \quad (7)$$

Щоб знайти кореляційну розмірність за формулою (7) будують графік залежності *C(r)* від радіуса *r* рухомої сфери в подвійній логарифмічній шкалі та знаходять кутовий коефіцієнт нахилу кривої на прямолінійній ділянці графіка. Величина нахилу графіка вказує на те, наскільки швидко збільшується кількість точок із збільшенням радіусу рухомих сфер, (рис. 1б). Для різних динамічних систем ця величина може відрізнятися і є її інваріантною характеристикою, яка залежить як від кількості рівнянь, що описують систему, так і від міри неоднорідності фрактальної структури атрактора. На основі аналізу кореляційної розмірності оцінюють характер динаміки системи – хаотичність, циклічність. Кореляційна розмірність застосовується для вивчення як фізичних систем, так і економічних процесів, біологічних систем, в багатьох інших областях, де важливу роль відіграє складність системи.

Метод знаходження кореляційної розмірності досліджували Грасбергер та Прокачча (Grassberger P., Procaccia I.) У статті [7] автори представили основи методу кореляційної розмірності (також відомий як G–P метод) для кількісного аналізу дивних атракторів. Робота включає математичне обґрунтування методу та його застосування до аналізу нелінійних динамічних систем. Основний акцент зроблено на визначенні зв'язку між кореляційною розмірністю та геометричними властивостями атракторів. Метод став основою для подальших досліджень у сфері хаотичних систем.

Робота [8] Мальрезона та ін. (Malraison B., Atten P., Bergé P., Dubois M.**)** присвячена дослідженню експериментальної оцінки кореляційної розмірності для двох конвективних систем у режимі хаосу. Автори застосували метод Грасбергера-Прокачча до реальних фізичних систем, що демонструють турбулентні структури. Результати підтвердили теоретичні припущення про хаотичну природу даних систем. Суінні (Swinney H. L.) [9] зробив огляд досліджень складної динаміки та хаосу у різних фізичних системах. Основна увага приділялася експериментальним спостереженням нелінійних явищ, таких як переходи до турбулентності та хаотична поведінка. Автор також описав застосування методу кореляційної розмірності для класифікації складних динамічних режимів. У статті [10] Чіліберто і Голлуб (Ciliberto S., Gollub J. P.) проаналізували хаотичну поведінку мод у системах з параметричним збуренням хвиль на поверхні рідини. Автори вивчали нелінійний вплив взаємодії різних мод хвиль на їх динаміку. Кореляційна розмірність використовувалася для аналізу складності атракторів, які виникають у цих системах. Робота значно розширила розуміння нелінійних явищ у гідродинаміці.

У роботі [11] Мун і Лі (Moon F. C., Li G. X.) досліджували фрактальну структуру атрактора, що виникає в системах з подвійним потенціалом. Вони застосували метод кореляційної розмірності для аналізу хаотичної поведінки механічних систем, що коливаються між двома стабільними станами. Робота акцентує увагу на зв'язку між геометричними властивостями атрактора та фізичною поведінкою системи.

Aderemi, F. L., & Oladele, B. O. [12] описали застосування алгоритму Грассбергера і Прокачча для оцінки кореляційної розмірності на основі сейсмічних даних. Автори досліджували динамічні особливості землетрусів, використовуючи цей алгоритм для аналізу нелінійних сигналів, що дозволяє визначати хаотичність у процесах. Вони підкреслюють важливість кореляційної розмірності, як індикатора складності сейсмічних даних.

В статті [13] Lee, M. досліджує фрактальний аналіз простору токенів GPT-2, включаючи оцінку кореляційної розмірності для виявлення стабільності та еволюції цих просторів. Робота зосереджується на математичних аспектах представлення даних в моделі GPT-2 і розглядає вплив різних модифікацій моделі на її динамічні

характеристики. У статті [14] Benmizrachi, A., Procaccia, I., & Grassberger, P. розглядають відображення Бейкера, як приклад нелінійної динамічної системи, аналізуючи її хаотичні властивості. Автори використовують кореляційну розмірність для оцінки складності та нелінійності системи, підкреслюючи її застосовність до математичного моделювання хаотичних процесів. Krakovská, A., & Chvosteková, M. [15] запропонували простий метод оцінки кореляційної розмірності та його використання для виявлення причинно-наслідкових зв'язків у динамічних системах. Автори розглядають ефективність методу в реальних і симуляційних даних, демонструючи його придатність для аналізу взаємозв'язків у нелінійних системах.

Таким чином, методи оцінки кореляційної розмірності відіграють важливу роль в дослідженні характеристик різноманітних динамічних систем.

У цій роботі ми пропонуємо модифікований метод оцінки кореляційної розмірності — CDM (Correlation Dimension Matrix) метод, що полягає у використанні матриць, які замінюють громіздкі обчислення за формулами поданими в [7] і це прискорює обчислення та забезпечує більшу точність.

Метою цієї роботи є розробка ефективних методів аналізу фрактальних характеристик атракторів динамічних систем шляхом застосування матричних обчислень до знаходження кореляційної розмірності.

Запропонована методика розширює можливості аналізу багатовимірних динамічних систем і сприяє розвитку методів оцінки фрактальних характеристик у наукових дослідженнях.

3. Опис досліджуваних динамічних систем

Щоб перевірити ефективність алгоритму було розглянуто такі відомі «еталонні» динамічні системи:

1. ***Логістичне відображення*** (logistic map)[1; 6; 7], яке здатне демонструвати як регулярну, так і складну хаотичну поведінку в залежності від значення його параметра, можна виразити такою рекурсивною формулою:

$$X_{n+1} = \mu X_n(1 - X_n), \tag{8}$$

де X_{n+1} та X_n – наступне та попереднє значення послідовності, μ – параметр відображення, який визначає стан системи. Систему було досліджено в точці близькій до стану хаосу $\mu = 3{,}5699456$ (рис. 2а).

2. ***Відображення Ено*** (Henon map) [1; 7; 16]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n; \\ y_{n+1} &= bx_n. \end{aligned} \tag{9}$$

Ця математична модель часто використовується для вивчення динамічних характеристик і хаосу в системах. Рівняння було запропоноване Майклом Ено (Michel Hénon) в 1976 році, як модель простої нелінійної динамічної системи. В цьому відображенні кожна точка площини (x_n, y_n) відображається в точку (x_{n+1}, y_{n+1}) відповідно до (9). В залежності від параметрів a та b система може перебувати в різних станах. Для класичних значень $a = 1{,}4$ та $b = 0{,}3$ – відображення демонструє хаотичну поведінку (рис. 2б).

3. ***Відображення Каплана-Йорка*** (Kaplan–Yorke) [7; 17] є однією з найважливіших моделей в теорії хаотичних систем. Ця система є прикладом дискретного відображення, яке описує хаотичну динаміку. Вона була вперше вивчена та описана Дж. Капланом та М. Йорком, американськими фізиками в 1979 році. Відображення Каплана-Йорка описують рекурентним рівнянням:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n \ (mod\ 1) \\ y_{n+1} &= \alpha y_n + \cos(4\pi x_n), \end{aligned} \tag{10}$$

де α – параметр системи, mod – оператор модуля. Системи задані рівнянням (10) виявляють хаотичну динаміку, демонструють чутливість до початкових умов і є непередбачуваними (рис. 2в).

4. ***Відображення Заславського*** (Zaslavskii Map) [18] – математична модель, запропонована Джорджем М. Заславським, була згодом досліджена Расселом, Хансоном і Оттом [15], а також Грасбергером і Прокаччею [7]. В цій дискретній динамічній моделі кожній точці на площині ставиться у відповідність інша точка за формулами:

$$x_{n+1} = [x_n + \nu(1 + \mu y_n) + \epsilon\nu\mu\cos(2\pi x_n)](mod\ 1);$$
$$y_{n+1} = e^{-r}(y_n + \epsilon\cos(2\pi x_n)), \quad (11)$$

де $\mu = \frac{1-e^{-r}}{r}$, ν, μ, ϵ і r – параметри від яких залежить динаміка системи, mod – оператор модуля з дійсним аргументом. У дослідженні було вибрано такі параметри: r = 3, ϵ = 0,3, ν = 400/3. Ця динамічна система при виборі певних параметрів може демонструвати хаотичну поведінку, що означає чутливість до початкових умов: навіть невеликі зміни можуть призвести до значних відмінностей у подальшому розвитку системи (рис. 2г).

5. ***Система Лоренца*** описує поведінку повітряних потоків чи рідин під впливом градієнта температур та при наявності сили тяжіння, може бути задана системою диференціальних рівнянь [7; 19]:

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{t}} = \sigma(\mathrm{y} - \mathrm{x}); \quad \frac{\partial y}{\partial t} = x(\rho - z) - y; \quad \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{xy} - \beta, \quad (12)$$

де σ – безрозмірне співвідношення коефіцієнтів в’язкості та теплопровідності (число Прандтля), ρ – безрозмірний градієнт температури, що пов'язаний з числом Релея, β – геометричний множник. Для параметрів σ = 10, ρ = 28 та β = 8/3 система проявляє чутливість до початкових умов та демонструє хаотичну поведінку(рис. 2д).

6. ***Атрактор Реслера*** (Rössler attractor) був вперше досліджений німецьким фізиком і хіміком Отто Реслером в 1976 році [20]. Траєкторія задається системою трьох диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z; \quad \frac{dy}{dt} = x + a \cdot y; \quad \frac{dz}{dt} = b + z \cdot (x - c). \quad (13)$$

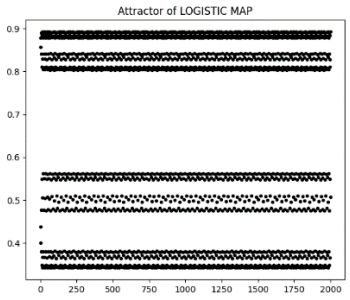
Ці рівняння описують стан системи в тривимірному фазовому просторі. При значеннях параметрів $a = b = 0{,}2$ *і* $2{,}6 \leq c \leq 4{,}2$ атрактор має стійкі граничні цикли. При $c > 4{,}2$ виникає хаотичний атрактор, чітко визначені лінії граничних циклів розпливаються і заповнюють фазовий простір нескінченною кількістю траєкторій, що мають властивості фрактала. Атрактор Реслера включає лінійні і нелінійні члени, які генерують хаос (рис. 2е).

7. ***Система Рабіновича-Фабриканта*** була запропонована в 1979 році М.І. Рабіновичем та А.Л. Фабрикантом [7; 21], що досліджували поведінку нелінійної динамічної системи в нерівноважній дисипативній структурі. Вони записали відоме рівняння Ландау для цієї моделі, як узагальнене комплексне параболічне рішення, що у спрощеному вигляді було зведено до системи трьох рівнянь:

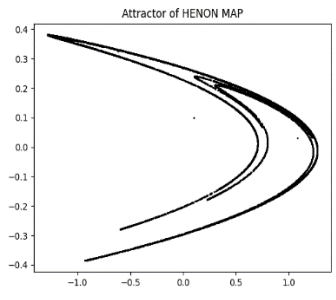
$$\frac{dx}{dt} = y(z - 1 + x^2) + \gamma x; \quad \frac{dy}{dt} = x(3z + 1 - x^2) + \gamma y; \frac{dz}{dt} = -2z(\nu + xy), \quad (14)$$

де γ і ν – параметри системи, що мають смисл коефіцієнтів дисипації. Систему було досліджено в хаотичному режимі для γ = *0,87* та ν = 1,1 (рис. 2є).

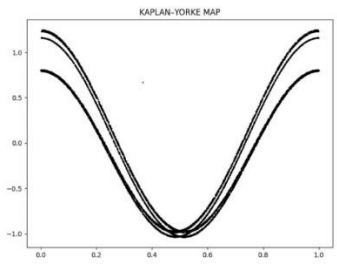
Візуалізацію усіх досліджуваних атракторів подано на рис. 2а – є. В усіх випадках бачимо, що атрактори мають складну фрактальну структуру та демонструють інваріантність при збільшенні масштабу. Атрактори рис. 2а – г були отримані безпосередньо застосовуючи відповідні рекурентні формули. Для побудови тривимірних атракторів рис. 2д – є було застосовано адаптивний метод Рунге-Кути 4-го та 5-го порядків [22]. Вигляд атракторів відповідає поданим у джерелах [1; 7; 16-21].



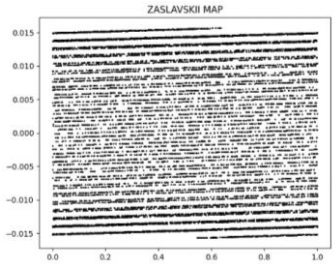
а



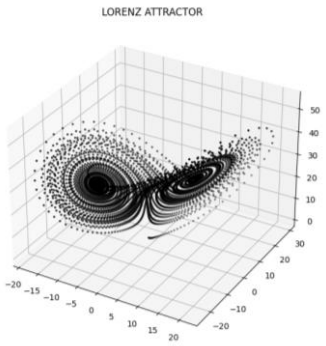
б



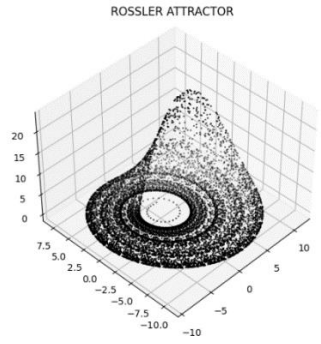
в



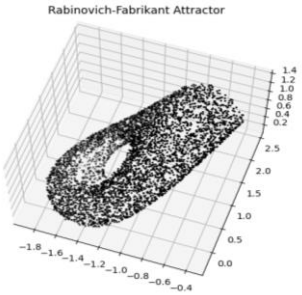
г



д



е



є

Рис. 2. Візуалізація атракторів динамічних систем: а – логістичне відображення при μ = 3,5699456; б – відображення Ено; в – відображення Каплана-Йорка; г – відображення Заславського; д – система Лоренца; е – система Ресслера; є – система Рабіновича-Фабриканта

Fig. 2. Visualization of attractors in dynamic systems: a – logistic map for μ = 3,5699456; b – Henon map; c – Kaplan–Yorke map; d – Zaslavsky map; e – Lorenz system; f – Rössler system; g – Rabinovich–Fabrikant system

4. Оцінка кореляційної розмірності із застосуванням матричних обчислень

Щоб оцінити кореляційну розмірність за формулами (6) і (7) необхідно здійснити велику кількість обчислень. Більш ефективним способом, який ми пропонуємо, є побудова матриці відстаней з подальшим її сортуванням. Цей метод є більш доцільним з точки зору оптимізації та включає всі точки атрактора без втрати даних. Метод має кілька важливих етапів, на кожному з яких було отримано важливі кількісні та якісні характеристики.

3.1. Побудова матриці відстаней D_s

Матриця відстаней D_s містить усі попарні евклідові відстані між точками атрактора. Якщо $Y_n = \{Y_0, Y_1, \dots Y_{n-1}\}$ – ряд векторів, що позначають точки атрактора у багатовимірному фазовому просторі, то спочатку будуємо матрицю M_s кожен рядок якої є повторенням ряду Y_n:

$$M_s = \begin{pmatrix} Y_0 & Y_1 & \dots Y_{n-1} \\ Y_0 & Y_1 & \dots Y_{n-1} \\ & \ddots & \\ Y_0 & Y_1 & \dots Y_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Тоді, матрицю відстаней можна знайти, як різницю матриць M_s та M_s^T – транспонованої матриці з подальшим знаходженням евклідової норми:

$$D_s = \|M_s - M_s^T\|, \quad (16)$$

де норма береться по кожному окремому елементу матриці.

Тоді, отримаємо шукану діагонально симетричну квадратну матрицю D_s у якій кожен елемент $D_s\ (i,j)$ є відстанню між точками Y_i та Y_j атрактора:

$$D_s\ (i,j) = \|M_s(i,j) - M_s^T(i,j)\| = \ \|Y(i) - Y(j)\|. \quad (17)$$

Матриця має нульові елементи вздовж головної діагоналі. Така матриця відстаней є проекцією точок атрактора m-вимірного фазового простору на двовимірну площину.

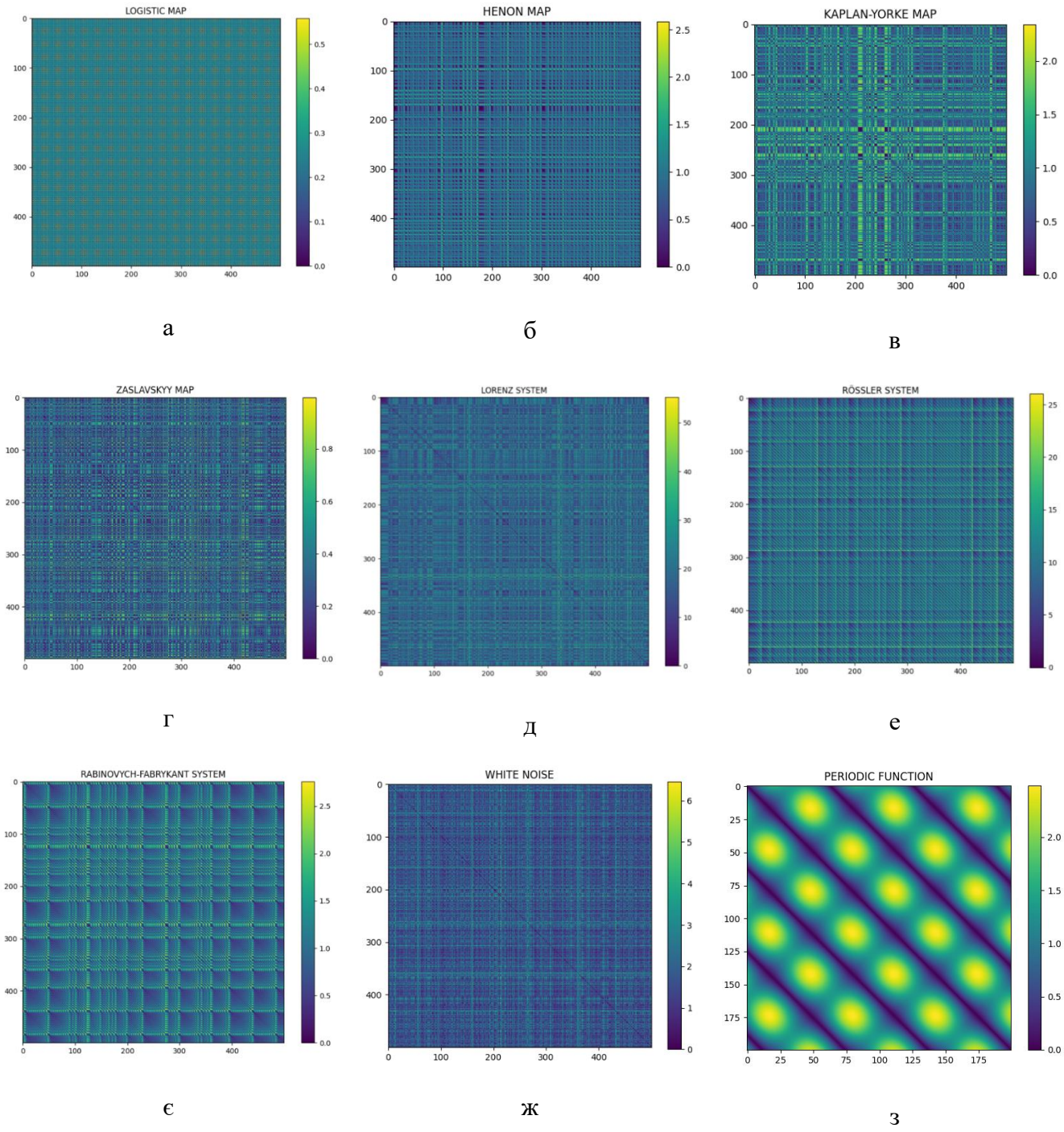


Рис. 3. Діаграми матриць відстаней: а – логістичне відображення; б – відображення Ено; в – відображення Каплана-Йорка; г – відображення Заславського; д – система Лоренца; е – система Реслера; є – система Рабіновича-Фабриканта; ж – білий шум; з – синусоїда

Fig. 3. Distance matrix diagrams: a – logistic map; b – Henon map; c – Kaplan–Yorke map; d – Zaslavsky map; e – Lorenz system; f – Rössler system; g – Rabinovich–Fabrikant system; h – white noise; i – sinusoid.

Діаграми матриць відстаней досліджуваних систем представлено на рис. 3а – є. Для всіх досліджуваних атракторів діаграми мають характерні структурні особливості –

чергування світлих і темних смуг, що утворюють прямокутні області. У випадку гаусового білого шуму діаграма має суцільну «шумову» структуру, як на рис. 3ж, для періодичної функції характерна чітка періодична структура – рис. 5з.

З рисунків 3а – з слідує, що за типом діаграми можна візуально визначити тип атрактора та про процес який його породжує. У випадку діаграм досліджуваних хаотичних атракторів, маємо проміжний випадок між строгою періодичністю та шумом.

У випадку хаотичних процесів спостерігаємо характерну текстуру на діаграмах, що є наслідком наявності тонкої фрактальної структури. Такі діаграми дають змогу виявити структурний порядок у хаотичних системах. Але, більш точно виявити такі особливості дає змогу подальший кількісний аналіз.

3.2. Сортування матриць відстаней та знаходження кореляційної розмірності

Після сортування матриці D_s отримаємо такий ряд відстаней, кожна точка якого є відстанню на якій знаходиться кожна наступна пара точок із збільшенням радіуса рухомих сфер (формула (6)), що з'являється на цій відстані. Вилучивши перші нулі та всі парні елементи, щоб уникнути повторів отримаємо ряд:

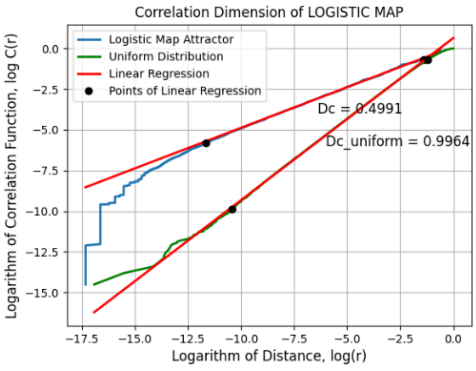
$$X_s = \{x_i \in sort(D_s): x_i \neq 0,\ i\ mod\ 2 \neq 0\},\ i = 1, 2 \dots, n^2\,. \tag{18}$$

Щоб отримати кореляційну функцію, як у формулі (6) необхідно поставити кожному значенню ряду відстаней X_s ймовірність знаходження пари точок на цій відстані. Якщо ряд X_s має довжину K, то кожному значенню ряду X_s буде відповідати значення ряду Y_s:

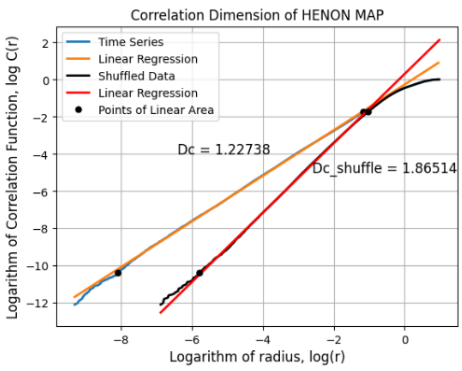
$$Y_s = \left\{\frac{1}{K} \cdot i\right\}, i = 1, 2, \dots, K, \tag{19}$$

де $K = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$, n – кількість точок атрактора фазового простору Y_n. Кожне значення ряду Y_s є ймовірністю знаходження двох довільних дочок фазового простору на відстані із ряду X_s. Побудувавши залежність Y_s від X_s в подвійній логарифмічній шкалі, отримаємо графіки залежностей досліджуваних атракторів.

На рис. 4 а-є представлено графіки оцінки кореляційної розмірності за нахилом у подвійній логарифмічній шкалі для різних динамічних систем.



а)



б)

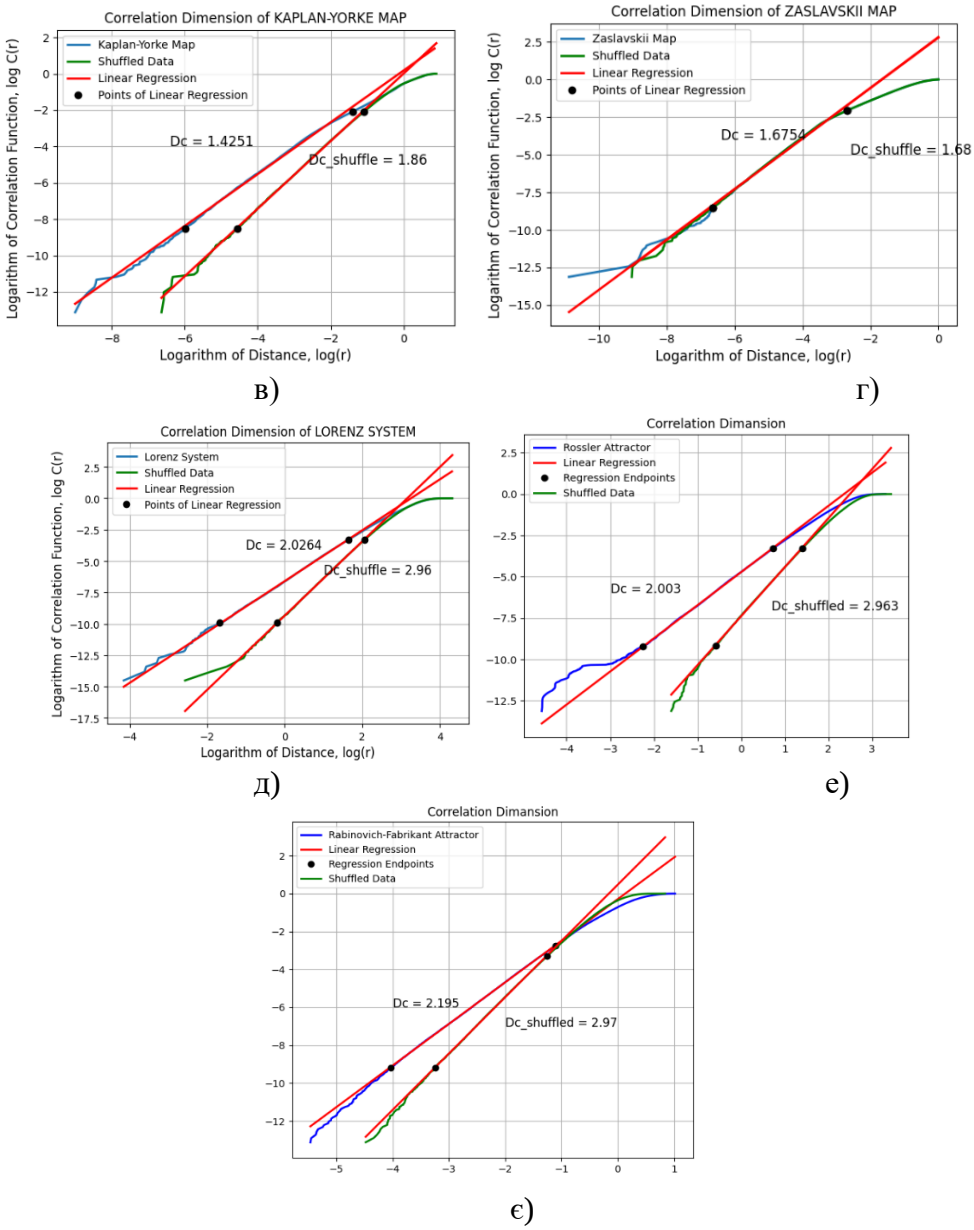


Рис. 4. Оцінка кореляційної розмірності за кутом нахилу в подвійній логарифмічній шкалі: а – логістичне відображення; б – відображення Ено; в – відображення Каплана-Йорка; г – відображення Заславського; д – система Лоренца; е – система Реслера; є – система Рабіновича-Фабриканта

Fig. 4. Estimation of the correlation dimension based on the slope in double logarithmic scale: a – logistic map; b – Henon map; c – Kaplan–Yorke map; d – Zaslavsky map; e – Lorenz system; f – Rössler system; g – Rabinovich–Fabrikant system.

Аналіз отриманих графіків підтверджує можливість чіткого визначення прямолінійної ділянки, що дозволяє оцінити кут нахилу. Цей кут є кореляційною розмірністю D_c атракторів досліджуваних систем. На рис. 4 а–є спостерігається суттєва відмінність між нахилами для вихідних часових рядів та перемішаних даних. Це свідчить про руйнування фрактальної структури атрактора під час перемішування, що призводить до рівномірного заповнення фазового простору і зростання кореляційної розмірності до максимально можливої – розмірності фазового простору.

Для логістичного відображення оцінкою кореляційної розмірності є D_c = 0,4991, що близьке до тестової оцінки з роботи [7] – D_c = 0,5±0,01. Для відображення Ено

кореляційна розмірність становить D_c = 1,198, що також узгоджується з результатом, отриманим у роботі [7] - D_c = 1,21±0,01. Відображення Каплана-Йорка має кореляційну розмірність D_c = 1,4251, що свідчить про дробову розмірність цього атрактора, характерну для хаотичних систем.

В роботі [7] було подано усереднену розмірність атрактора Заславського, як $D_c \sim$ 1,5, що говорить про дробову розмірність цього атрактора. На рис. 4г кореляційну розмірність було оцінено, як $D_c \sim 1{,}67$. Однак, остаточного висновку про фіксоване значення цього параметра зробити не можна, він може лежати в певному діапазоні значень в залежності від випадкових флуктуацій, про цю проблему згадують автори в роботі [7].

Система Лоренца має оцінку кореляційної розмірності D_c=2,0264, яка близька до результатів роботи [7] – D_c = 2,05±0,01. Для системи Ресслера кореляційна розмірність дорівнює D_c = 2,003, що підтверджує правильність застосованого алгоритму та відповідність теоретичним очікуванням. Нарешті, для системи Рабіновича-Фабриканта кореляційна розмірність становить D_c = 2,1954, що також співпадає з оцінками, наведеними в роботі [7] – D_c = 2,19±0,01.

Для всіх атракторів перемішування даних суттєво змінює їхню кореляційну розмірність. З графіків на рис. 4 а–є видно, що після перемішування фрактальна структура атрактора руйнується, і точки заповнюють фазовий простір рівномірно. Це призводить до зростання кореляційної розмірності, яка наближається до розмірності фазового простору.

Наприклад, для системи Лоренца після перемішування даних кореляційна розмірність наближається до розмірності вкладень m = 3 і становить $D_{c_shuffled} \approx 2{,}96$. Аналогічно для системи Рабіновича-Фабриканта значення кореляційної розмірності перемішаних даних дорівнює $D_{c_shuffled} \approx 2{,}97$, що близьке до розмірності фазового простору цих атракторів.

Отримані значення кореляційної розмірності демонструють узгодженість результатів між різними методами та підтверджують ефективність запропонованого підходу. Усі значення знаходяться в межах, характерних для хаотичних атракторів досліджуваних систем.

5. Висновки

Метод оцінювання кореляційної розмірності атракторів динамічних систем, представлений у цій роботі, є вдосконаленою модифікацією алгоритму Грасбергера–Прокачча [7], яка вирізняється ефективністю з погляду обчислювальних ресурсів та точності. Застосування цього методу передбачає побудову матриці відстаней, її сортування та побудову логарифмічної залежності кореляційної функції від відстані у подвійній логарифмічній шкалі. Для точної оцінки кута нахилу, а також для моделювання потоків, заданих системою диференціальних рівнянь, було використано методи інтерполяції Рунге-Кути [22].

Матричний метод оцінки кореляційної розмірності демонструє високу ефективність і може забезпечити репрезентативні результати навіть для невеликих вибірок обсягом від 1000 до 5000 точок. Це суттєво знижує вимоги до обчислювальних ресурсів порівняно з роботою [7], де оцінювання проводилося на основі вибірок із 15 000 значень. Завдяки застосуванню матричних обчислень вдалося досягти не лише підвищення швидкості виконання розрахунків, але й точності оцінок, оскільки метод враховує всі точки атрактора.

Результати дослідження показали, що тривимірні атрактори Лоренца, Ресслера та Рабіновича-Фабриканта мають кореляційну розмірність у межах $2 < D_c < 3$, що відповідає теоретичним прогнозам і збігається з попередніми оцінками. При цьому

кореляційна розмірність для перемішаних даних значно більша і наближається до розмірності фазового простору, що свідчить про руйнування тонкої фрактальної структури атрактора.

Побудова матриць відстаней, їх сортування та виключення циклів із процесу побудови логарифмічної залежності, значно спрощує обчислення та дозволяє підвищити швидкість аналізу. Використання матричних обчислень забезпечує швидкий та точний підхід до оцінки кореляційної розмірності атракторів динамічних систем, що робить його зручним інструментом для аналізу фрактальних властивостей складних динамічних систем.

Список використаної літератури:

1. Moon, F. C. Chaotic vibrations: an introduction for applied scientists and engineers // Research supported by NSF. — 1987.
2. Van der Pol, B. Theory of the amplitude of free and forced triode vibrations // Radio review. — 1920. — Т. 1. — С. 701-710.
3. Hausdorff, F. Dimension und äußeres Maß // Mathematische Annalen. — 1918. — Т. 79, № 1. — С. 157-179.
4. Besicovitch, A. S. On linear sets of points of fractional dimension // Mathematische Annalen. — 1929. — Т. 101, № 1. — С. 161-193.
5. Rényi, A. On measures of entropy and information // Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, volume 1: contributions to the theory of statistics. — University of California Press, 1961. — Т. 4. — С. 547-562.
6. Falconer, K. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. — John Wiley & Sons, 2004.
7. Grassberger, P., Procaccia, I. Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D: nonlinear phenomena. — 1983. — Т. 9, № 1-2. — С. 189-208. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90298-1.
8. Malraison, B., Atten, P., Berge, P., Dubois, M. Dimension of strange attractors: an experimental determination for the chaotic regime of two convective systems // Journal de Physique lettres. — 1983. — Т. 44, № 22. — С. 897-902. DOI: 10.1051/jphyslet:019830044022089700.
9. Swinney, H. L. Observations of complex dynamics and chaos // Fundamental problems in statistical mechanics VI. — 1985. — С. 253-289.
10. Ciliberto, S., Gollub, J. P. Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves // Journal of Fluid Mechanics. — 1985. — Т. 158. — С. 381-398. DOI: 10.1017/S0022112085002701.
11. Moon, F. C., Li, G. X. The fractal dimension of the two-well potential strange attractor // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1985. — Т. 17, № 1. — С. 99-108. DOI: 10.1016/0167-2789(85)90137-X.
12. Aderemi, F. L., Oladele, B. O. Estimation of correlation dimension from earthquake data using grassberger and procaccia algorithm // Austr. J. Sci. Technol. — 2021. — Т. 5, № 3. — С. 621-625.
13. Lee, M. Fractal Analysis of GPT-2 Token Embedding Spaces: Stability and Evolution of Correlation Dimension // Fractal and Fractional. — 2024. — Т. 8, № 10. — С. 603.
14. Benmizrachi, A., Procaccia, I., Grassberger, P. Baker's Map // Chaos. — 2021.
15. Krakovská, A., Chvosteková, M. Simple correlation dimension estimator and its use to detect causality // Chaos, Solitons & Fractals. — 2023. — Т. 175. — С. 113975.

16. Henon, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // Communications in Mathematical Physics. — 1976. — Т. 50. — С. 376-392. DOI: 10.1007/978-0-387-21830-4_8.
17. Kaplan, J. L., Yorke, J. A. Functional differential equations and approximation of fixed points // Lecture notes in mathematics. — 1979. — Т. 730. — С. 204-227.
18. Zaslavsky, G. M. The simplest case of a strange attractor // Physics Letters A. — 1978. — Т. 69, № 3. — С. 145-147. DOI: 10.1016/0375-9601(78)90195-0.
19. Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of atmospheric sciences. — 1963. — Т. 20, № 2. — С. 130-141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2.
20. Rössler, O. E. An equation for continuous chaos // Physics Letters A. — 1976. — Т. 57, № 5. — С. 397-398. DOI: 10.1016/0375-9601(76)90101-8.
21. Rabinovich, M. I., Fabrikant, A. L. Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media // J. Exp. Theor. Phys. — 1979. — Т. 77. — С. 617-629.
22. Butcher, J. C. Numerical methods for ordinary differential equations. — John Wiley & Sons, 2016.

References:

1. Moon, F. C. (1987). Chaotic vibrations: an introduction for applied scientists and engineers. Research supported by NSF.
2. Van der Pol, B. (1920). Theory of the amplitude of frfeE. forced triode vibrations. Radio review, 1, 701-710.
3. Hausdorff, F. (1918). Dimension und äußeres Maß. Mathematische Annalen, 79(1), 157-179.
4. Besicovitch, A. S. (1929). On linear sets of points of fractional dimension. Mathematische Annalen, 101(1), 161-193.
5. Rényi, A. (1961, January). On measures of entropy and information. In Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, volume 1: contributions to the theory of statistics (Vol. 4, pp. 547-562). University of California Press.
6. Falconer, K. (2004). Fractal geometry: mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons.
7. Grassberger, P., & Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. Physica D: nonlinear phenomena, 9(1-2), 189-208. https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90298-1
8. Malraison, B., Atten, P., Berge, P., & Dubois, M. (1983). Dimension of strange attractors: an experimental determination for the chaotic regime of two convective systems. Journal de Physique lettres, 44(22), 897-902. https://doi.org/10.1051/jphyslet:019830044022089700
9. Swinney, H. L. (1985). Observations of complex dynamics and chaos. Fundamental problems in statistical mechanics VI, 253-289.
10. Ciliberto, S., & Gollub, J. P. (1985). Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves. Journal of Fluid Mechanics, 158, 381-398. https://doi.org/10.1017/S0022112085002701
11. Moon, F. C., & Li, G. X. (1985). The fractal dimension of the two-well potential strange attractor. Physica D: Nonlinear Phenomena, 17(1), 99-108. https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90137-X
12. Aderemi, F. L., & Oladele, B. O. (2021). Estimation of correlation dimension from earthquake data using grassberger and procaccia algorithm. Austr. J. Sci. Technol., 5(3), 621-625.

13. Lee, M. (2024). Fractal Analysis of GPT-2 Token Embedding Spaces: Stability and Evolution of Correlation Dimension. Fractal and Fractional, 8(10), 603.
14. Benmizrachi, A., Procaccia, I., & Grassberger, P. (2021). Baker, s Map.
15. Krakovská, A., & Chvosteková, M. (2023). Simple correlation dimension estimator and its use to detect causality. Chaos, Solitons & Fractals, 175, 113975.
16. Henon, M. (1976). A two-dimensonal mapping with a strange attractor. Communications in Mathematical Physics, 50, 376-392. https://doi.org/10.1007/978-0-387-21830-4_8
17. Kaplan, J. L., & Yorke, J. A. (1979). Functional differential equations and approximation of fixed points. *Lecture notes in mathematics*, *730*, 204-227.
18. Zaslavsky, G. M. (1978). The simplest case of a strange attractor. Physics Letters A, 69(3), 145-147. https://doi.org/10.1016/0375-9601(78)90195-0
19. Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. Journal of atmospheric sciences, 20(2), 130-141. https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2
20. Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. Physics Letters A, 57(5), 397-398. https://doi.org/10.1016/0375-9601(76)90101-8
21. Rabinovich, M. I., & Fabrikant, A. L. (1979). Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media. *J. Exp. Theor. Phys*, *77*, 617-629.
22. Butcher, J. C. (2016). Numerical methods for ordinary differential equations. John Wiley & Sons.

V. A. HAVRYSH
the head of the computer science group at the after-school educational institution "Centre of Children's and Youth Creativity of Cherkasy".
Master of physics, The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine
vagavrish@ukr.net

V. S. DENYSENKO
candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of economics and business modeling department,
The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine
denvikstab@vu.cdu.edu.ua

ESTIMATION OF THE CORRELATION DIMENSION OF DYNAMICAL SYSTEM ATTRACTORS BASED ON MATRIX COMPUTATIONS (CDM - METHOD)

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-21-36 PACS: 05.45.-a, 05.45.Tp, 05.45.Df, 05.10.-a, 05.45.Pq

The methods for estimating the correlation dimension of attractors of dynamical systems, an invariant measure of the heterogeneity of the fractal structure of attractors, have been studied.

The aim of the article is to develop effective methods for estimating the correlation dimension of attractors in dynamical systems and to apply them to a range of models, enabling a comparison of the obtained results with theoretical and experimental findings.

Based on the Grassberger–Procaccia algorithm, a method for calculating the correlation dimension using matrix computations has been developed and tested. This method involves constructing a distance matrix between points of the attractor in phase space, sorting the matrix, and analyzing the logarithmic dependency graph. The developed methods have been applied to «reference» attractors: the logistic map, Henon map, Kaplan–Yorke attractor, Zaslavsky attractor, Lorenz, Rössler and Rabinovich–Fabrikant systems. This application confirmed theoretical aspects through experimental results. The use of matrix-based computations has enabled not only an increase in the calculation speed but also improved the accuracy of the estimates, as the method accounts for all points of the attractor.

The study results indicate that the three-dimensional attractors of Lorenz, Rössler, and Rabinovich–Fabrikant systems have a correlation dimension within the range $2 < D_c < 3$, aligning with theoretical predictions and consistent with previous estimates. Meanwhile, the correlation dimension for shuffled data is significantly higher and approaches the dimensionality of the phase space, indicating the destruction of the attractor's delicate fractal structure.

The described methods generalize the research conducted by the authors and can be applied to a wide range of problems in physical and economic dynamics. The article contributes to the development of methods for assessing the fractal characteristics of attractors and expanding their application in scientific studies.

Keywords: correlation dimension, attractors, phase space, dynamical systems, distance matrix, Grassberger–Procaccia method, fractal structure, chaos.

Одержано редакцією 08.05.2024
Прийнято до друку 23.06.2024

ORCID: 0000-0002-1443-9052

Д. О. СТУПАК
к.т.н., доцент,
старший аналітик консолідованої інформації, EPAM Digital, Черкаси, Україна,
stupak0810@gmail.com

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-37-45 PACS: 02.50.Sk, 07.05.Mh, 89.75.Fb, 02.70.Rr

РОЗРОБКА МЕТРИКИ ЯКОСТІ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ ОБ'ЄКТІВ ДЛЯ БАГАТОВИМІРНИХ ПРОСТОРІВ

В сучасному світі нові дані генеруються в геометричній прогресії. Кластеризація є одним із методів машинного навчання, що не вимагає розмічених даних, а тому дає можливість швидко визначити структуру даних і зробити певні висновки. В статті розглянуто проблему кластеризації об'єктів в багатовимірному просторі. Ця проблема не нова. Поняття «прокляття розмірності» саме в кластеризації є критичним, оскільки алгоритм має спочатку поділити об'єкти в багатовимірному просторі на кластери, а потім застосовувати метрики якості кластеризації для знаходження оптимальної структури. Існуючі метрики оцінки якості кластеризації часто залежать від розмірності простору, а тому їх використання за таких умов може бути утруднено або призводити до невірних результатів. Метою статті є розробка метрики якості кластеризації, значення якої не залежало б від розмірності простору, в якому описані об'єкти. Для дослідження кластеризації було згенеровано два набори датасетів. В першому наборі об'єкти згруповані у 5 добре розділених кластерів, в другому – кластери майже «торкаються» один одного. Кожен набір містить 6 датасетів із розмірністю простору 10, 100, 300, 1024, 2048 і 4096. Розроблена метрика якості кластеризації базується на порівнянні міжкластерної характеристики поділу об'єктів на кластери і внутрішньокластерної характеристики. В метриці враховані розмірність простору і умова пріоритету поділу об'єктів на меншу кількість кластерів. Використані методи чисельного експерименту для доведення ефективності застосування розробленої метрики якості кластеризації. Зроблена перевірка на синтетичних датасетах, що є близькими по розподілу об'єктів в існуючих датасетах в практичних задачах. Показно, що розроблена метрика якості кластеризації об'єктів дозволяє за «методом ліктя» визначити вірну оптимальну кількість кластерів, не залежить від розмірності простору і може бути застосована навіть в складних випадках, коли кластери розташовані близько обин від одного.

Ключові слова: кластеризація, багатовимірний простір, метрика якості, метод ліктя.

1. Вступ

Постановка проблеми; аналіз останніх досліджень та публікацій; мета статті.

В сучасному діджіталізованому світі кількість інформації, яка накопичується людством збільшується кратно щороку. Все більше даних збирають автоматизовані системи, розвиваються і покращуються великі мовні моделі типу ChatGPT, LLaMa, збільшується можливості по зберіганню і обробці великих об'ємів даних [1]. Часто

виникає ситуація, коли дослідникам невідома структура даних, тобто чи поєднується вони в групи і що ці групи можуть означати. В цьому випадку застосовують один із методів навчання без учителя – кластеризацію. Важливим етапом для застосування методів кластеризації є визначення оптимальної кількості кластерів або груп, на які оптимально слід поділити об’єкти. Для цього використовують метрики якості кластеризації. Однак всі ці метрики якості перевірені для випадків, коли об’єкт описується вектором довжиною до 10. Автори зазначають, що збільшення розмірності векторного простору знижує ефективність використання цих метрик якості. Звідси актуальною є задача розробки метрики якості кластеризації, значення якої б не залежали від розмірності векторного простору, що дозволить використовувати її в багатовимірних просторах.

2. Кластеризація об’єктів

2.1. Методи кластеризації

Існує багато методів кластеризації об’єктів, але всі вони можеть бути поділені на три групи [2]. ***Відцентрові методи*** (k-Means) намагаються визначити положення центрів кластерів і віднести об’єкти до того кластера, центр якого є ближчим до об’єкта. У цих методів є певні недоліки і обмеження, але в цілому вони досить непогано виконують свою задачу. **Ієрархічні методи** (агломеративна кластеризація) будують дерево або ієрархію на базі відстаней між об’єктами. В більшості випадків ці методи працюють повільніше за попередні але якість кластеризації зазвичай трохи краща. Методи кластеризації, засновані на визначенні **густини розташування об’єктів** в просторі (HDBSCAN). Це найповільніша група методів, що дає можливість корректно визначити досить складні структури, але дуже часто ці методи відносіть всі об’єкти до одного кластера, що робить їх досить нестабільними в роботі.

2.2. Існуючі метрики якості кластеризації

Обрані методи кластеризації можуть поділити об’єкти на певну кількість кластерів. Але задача кластеризації полягає не стільки в поділі об’єктів на кластери, скільки у визначенні структури об’єктів в датасеті, тобто визначенні такої кількості кластерів, при яких розбиття на кластри буде найбільше відповідати структурі даних.

Визначити це можна за допомогою метрик якості кластеризації [3]. Існує і активно використовується не менше десяти метрик якості кластеризації.За визначенням оптимального розбиття на кластери метрики поділяються на такі, для яких потрібно шукати максимальне значення, мінімальне значення або використати метод ліктя [4].

Розглянемо ті метрики якості, що найчастіше використовуються при кластеризації.

Silhouette або Silhouette score [5] розраховує те, наскільки кожен об'єкт схожий на об'єкти свого кластеру і не схожий на об'єкти в інших кластерах.

Для кожної точки розраховується середня схожіть із об’єктами свого кластеру

$$a(i) = \frac{1}{|C_I|-1}\sum_{j\in C_I, i\neq j} d(i,j), \quad (1)$$

де C_I – кластер, до якого відноситься об’єкт.

Потім розраховується середня несхожість на об’єкти іншого кластері і обирається найменше значення з порахованих для інших кластерів

$$b(i) = \min_{J\neq I} \frac{1}{|C_J|}\sum_{j\in C_J} d(i,j). \quad (2)$$

Значення метрики розраховується за формулою

$$s(i) = \frac{b(i)-a(i)}{\max\{a(i),b(i)\}}\ . \quad (3)$$

Якщо значення метрики вище 0,7 вважається що структура даних виявлена ідеально, при значеннях від 0,5 – виявлена, при значеннях менше ніж 0,25 – слабка відповідність. А значення самої метрики можуть знаходитись в діапазоні від -1 до +1. Але ці значення можуть бути досягнені лише для датасетів із невеликою кількістю ознак. Як буде показано в розділі 2, навіть у просторі розмірністю 10 при ідеальному поділі на кластери отримуємо значення 0,45.

Davies-Bouldin Index (DBI) [6] був винайдений в 1979 році. Він також показує наскільки добре поділені кластери, але в інший спосіб. Для кожного кластера розраховується середня відстань від об'єктів в кластері до їх центру. При чому формула (1.4) при різних значеннях *q* відповідає різним метрикам відстані. При *q=1* розраховується манхеттенська відстань, при *q=2* - евклідова, більші значення відповідають метриці Мінковського.

$$S_i = \left(\frac{1}{T_i} \sum_{j=1}^{T_i} ||X_j - A_i||_p^q \right)^{1/q} \tag{4}$$

Після цього розраховується відстань між центрами кластерів. При чому так саме можуть бути використані різні метрики дистанції

$$M_{i,j} = ||A_i - A_j||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{k,i} - a_{k,j}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

І фінальне значення метрики розраховується за формулою:

$$DB \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} D_i \quad , \tag{6}$$

де $D_i \equiv \max_{j \neq i} R_{i,j}$ - найбільша несхожість пари кластерів,

$R_{i,j} = \dfrac{S_i + S_j}{M_{i,j}}$ - несхожість кластера *i* та *j*.

Хоча в метрику і закладено можливість використання різник метрик дистанції для застосування в просторах більших порядків, реалізація в бібліотеці scikit-learn [7] використовує лише евклідову дистанцію.

Кращому розбиттю на кластери відповідає менше значення, в ідеальному випадку близьке до 0. Більші значення відповідають гіршим варіантам розбиття об'єктів на кластери.

Таблиця 1
Table 1

Залежність евклідової відстані для двох пар точок від зміни значень координат та розмірності простору
Dependence of the Euclidean distance for two pairs of points on the change in coordinate values and the dimension of space

№ зп	Розмірність простору	ЕВ І пара	ЕВ ІІ пара, зміна значень		
			0.05	0.1	0.15
1	10	2	0.158114	0.316228	0.474342
2	100	2	0.5	1	1.5
3	300	2	0.866025	1.732051	2.598076
4	1024	2	1.6	3.2	4.8
5	2048	2	2.262742	4.525483	6.788225
6	4096	2	3.2	6.4	9.6

Інші метрики [3] в різний спосіб визначають внутрішньокластерну відстань та міжкластерну відстань та фінальну формулу для поєднання цих відстаней.

В роботі будемо орієнтуватись саме на Silhouette score і Davies-Bouldin Index як на метрики якості, що найбільш часто застосовуються на практиці.

2.3. Розробка метрики якості кластеризації

Будь-яка метрика кластеризації має показати наскільки добре кластери розділені в просторі.

Метрика буде базуватись на міжкластерній дистанції та внутрішньокластерній дистанції.

Міжкластерна дистанція має показати наскільки далеко кластери розійшлись в просторі. Крім того, кластери можуть містити різну кількість об'єктів. Візьмемо за цю характеристику середньовзважену відстань центрів кластерів від загального центру датасету:

$$bcd = \frac{\sum_{i=1}^{k} \|z_i - z_{all}\| \cdot n_i}{n}, \quad (7)$$

де n – загальна кількість об’єктів в датасеті,

z_i – центр окремого кластера,

z_{all} - загальний центр датасету,

n_i – кількість об’єктів в i-му кластері.

Внутрішньокластерна дистанція має показати наскільки далеко об’єкти всередині кластера знаходяться від центру свого кластеру. Візьмемо середньоарифметичне значення відстані від кожного об’єкту до центру свого кластеру. Також при приблизно однакових значеннях метрика повинна показати, що розбиття на меншу кількість кластерів є доцільнішим. Тому отримані значення поділимо на кількість кластерів. Також, для компенсації збільшення розмірності векторного простору, поділимо на корінь квадратний із довжини вектору.

$$wcd = \frac{1}{k \cdot \sqrt{n_{dim}}} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{n_{i_i}} \cdot \sum_{x \in c_i} \|x - z_i\| \right), \quad (8)$$

де k – кількість кластерів,

c_i – кластер,

z_i – центр кластера,

x – об’єкт в кластері,

n_i – кількість об’єктів в кластері c_i,

n_{dim} – розмірність векторного простору.

Таким чином, обидві складові містять середні значення відстаней, не залежать від кількості точок в кластерах і датасеті, враховують розмірність простору.

Метрика якості кластеризації має задовільняти наступним вимогам:

- збільшуватись, коли відстань між центрами кластерів збільшується;
- зменшуватись, коли середня відстань всередині кластерів збільшується;
- бути обмеженою в діапазоні.

Цим вимогам відповідає функція

$$cl_{score} = 1 - \frac{1}{e^{e^{(bcd - wcd)}}} \quad (9)$$

В кращому випадку bcd має бути значно більше, ніж wcd. Це означатиме, що кластери відокремлені один від одного. Значення cl_{score} буде близьким до 1. В гіршому випадку bcd менше, ніж wcd. Це означає, що кластери завеликі для центрів (наприклад, об’єднано два відокремлених кластери в один). Тоді значення cl_{score} буде близьким до 0.

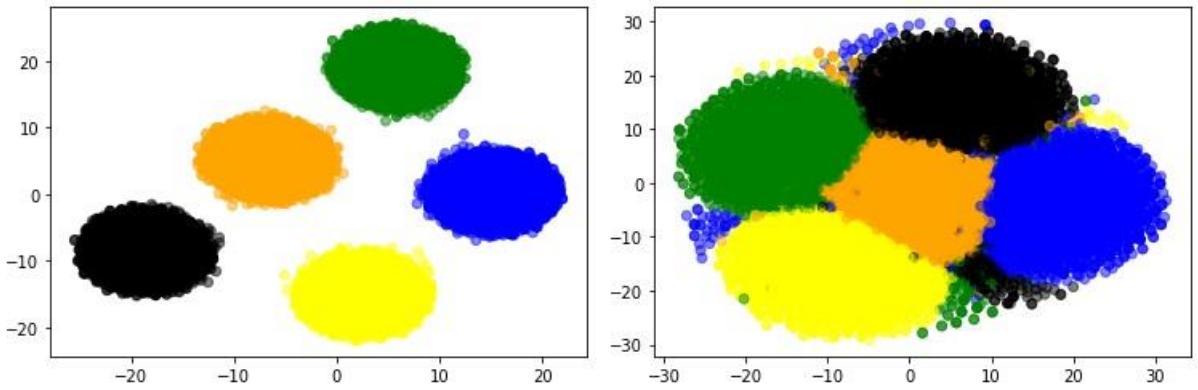
2.4. Перевірка ефективності використання розробленої метрики кластеризації на синтетичних даних

Для дослідження методів кластеризації об’єктів в багатовимірному просторі створимо два набори датасетів (рис.1). В першому наборі групи об’єктів будуть розташовані на значній відстані один від одного. Таке розташування називається розділеним (well-separated). В другому наборі відстань між кластерами майже відсутня. Таке розташування називається центроїдним (center-based). Всередині кожного набору згенеруємо датасети, що складаються із векторів довжиною 10, 100, 300, 1024, 2048, 4096. Кожен датасет має 5 груп по 4000 об'єктів. Фінальний датасет підчищається від викидів і містить від від 19500 до 19800 об'єктів.

Для кожного датасету було проведено алгомеративну кластеризацію із поділом на 2, 3, 4, 5, 6, 7 кластерів і розраховані значення cl_{score}.

3. Результати

Для першого набору датасетів, в якому об’єкті явно виділенні в кластери, отримані значення cl_{score} зведені в таблицю 2.



а) б)

Рис. 1. Візуалізація розташування об’єктів в датасетах при розділених даних (а) і центроїдному розташуванні (б).

Fig. 1. Visualization of the location of objects in datasets with separated data (a) and centroid location (b).

Таблиця 2

Table 2

Значення метрики cl_{score} для агломеративної кластеризації об’єктів, що добре поділені на 5 кластерів, в простораз розмірністю від 10 до 4096

Values of the cl_{score} metric for agglomerative clustering of objects that are well separated into 5 clusters, in spaces with dimensions from 10 to 4096

№ зп	Кластерів	Значення cl_{score} для векторних просторів розмірністю					
		10	100	300	1024	2048	4096
1	2	0.677	0.694	0.693	0.694	0.692	0.694
2	3	0.721	0.732	0.721	0.734	0.734	0.727
3	4	0.751	0.758	0.761	0.763	0.765	0.768
4	**5**	**0.766**	**0.781**	**0.788**	**0.792**	**0.795**	**0.798**
5	6	0.768	0.783	0.791	0.794	0.798	0.801
6	7	0.771	0.785	0.793	0.797	0.801	0.805

Як бачимо із задних в таблиці 2, при розбитті на меншу кількість кластерів, ніж є реально в датасеті, різниця між значення розробленної метрики істотно змінюється, при розбитті на більше кількість кластерів – зміна значень є значно меншою. Саме ця властивість дозволяє використати метод ліктя для визначення оптимальної кількості кластерів в датасеті (рис. 2).

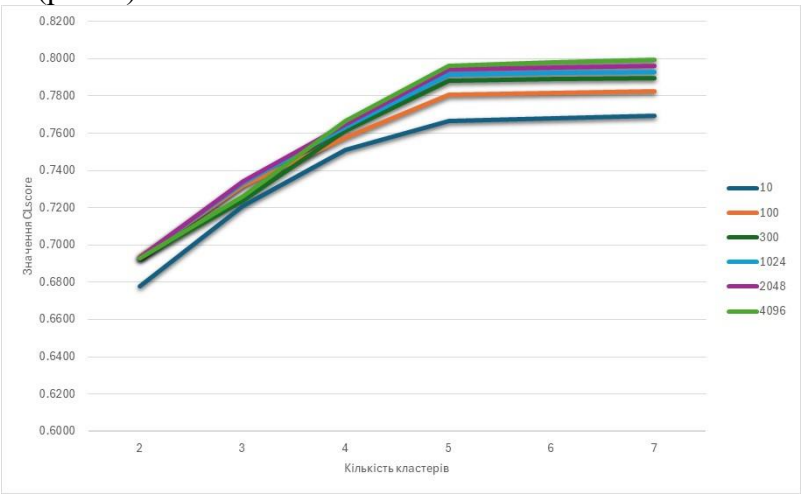


Рис. 2. Залежність значення cl_{score} від кількості кластерів та розмірності даних для добре розділених в просторі кластерів.

Fig. 2. Dependence of the cl_{score} value on the number of clusters and data dimension for well-separated clusters in space.

Для кластерів, що майже не розділені в просторі проведено аналогічні розбиття на кластери, а результати розрахунку розробленої метрики якості наведено в таблиці 3.

Таблиця 3
Table 3

Значення розробленої метрики якості cl_{score} для нерозділених кластерів
The value of the developed clscore quality metric for non-partitioned clusters

№ зп	Кластерів	Значення cl_{score} для розмірностей простору					
		10	100	300	1024	2048	4096
1	2	0.634	0.626	0.624	0.623	0.622	0.623
2	3	0.643	0.641	0.638	0.634	0.637	0.638
3	4	0.651	0.650	0.648	0.648	0.647	0.650
4	**5**	**0.658**	**0.659**	**0.658**	**0.658**	**0.657**	**0.660**
5	6	0.662	0.661	0.660	0.660	0.661	0.665
6	7	0.665	0.664	0.662	0.662	0.663	0.669

Хоча в даному випадку об'єкти в датасеті майже не розділені на окремі кластери, однак і тут можна побачити різницю в значенні приросту метрики для випадків, коли датасет розбито на меншу кількість кластерів, і для випадків, коли датасет розбито на більшу кількість кластерів. Графіки залежності cl_{score} для цього набору датасетів наведено на рис.3.

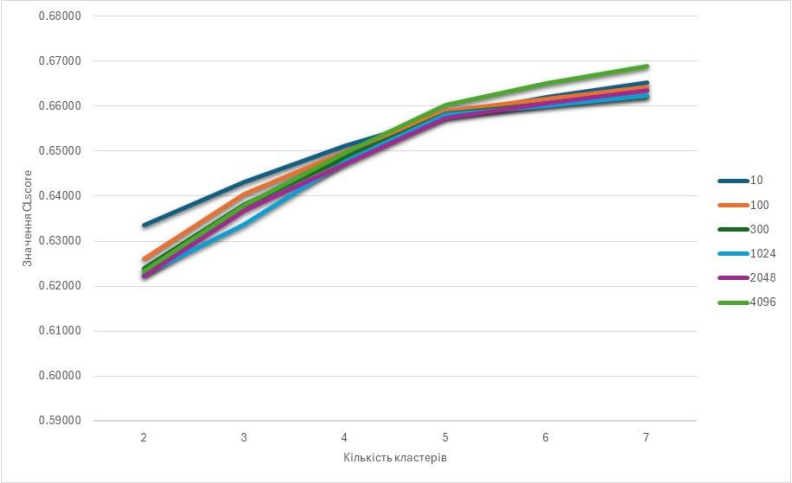


Рис.3. Залежність значення cl_{score} від кількості кластерів та розмірності даних для не розділених в просторі кластерів

Fig. 3. Dependence of the clscore value on the number of clusters and data dimension for clusters not separated in space

З графіків на рис.3 також можна зробити висновок, що метод ліктя для розробленої метрики якості кластеризації може бути застосований навіть у випадках, коли кластери в датасеті є майже не розділеними, тобто структура датасету не явна.

4. Висновки

В статті розроблена нова метрика оцінки якості кластеризації. Показано, що визначити оптимальну кількість кластерів можна за допомогою методу ліктя. Отримані значення метрики доводять, що метрика може бути застосована як для датасетів із невеликою розмірністю (5-10), так і для датасетів із розмірністю 2000-4000, при цьому значення метрики залежать від розташування об’єктів в багатовимірному просторі і майже не залежать від розмірності простору.

Список використаної літератури:

1. LLM Basics: Embedding Spaces - Transformer Token Vectors Are Not Points in Space [Електронний ресурс] — Режим доступу: https://www.lesswrong.com/posts/pHPmMGEMYefk9jLeh/llm-basics-embedding-spaces-transformer-token-vectors-are.
2. Madhulatha TS. An overview on clustering methods. IOSR J Eng. 2012; 2(4): pp. 719–725.
3. Liu, Y., Li, Z., Xiong, H., Gao, X., Wu, J. and Wu, S. Understanding and enhancement of internal clustering validation measures. IEEE Transactions on Cybernetics, 2013; 43(3), pp. 982–994.
4. Elbow method (clustering) [Електронний ресурс] — Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Elbow_method_(clustering).
5. Silhouette (clustering) [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Silhouette_(clustering).
6. Davies–Bouldin index [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Davies%E2%80%93Bouldin_index.
7. davies_bouldin_score [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.metrics.davies_bouldin_score.html.

References:

1. LLM Basics: Embedding Spaces - Transformer Token Vectors Are Not Points in Space [Електронний ресурс] — Режим доступу: https://www.lesswrong.com/posts/pHPmMGEMYefk9jLeh/llm-basics-embedding-spaces-transformer-token-vectors-are.
2. Madhulatha TS. An overview on clustering methods. IOSR J Eng. 2012; 2(4): pp. 719–725.
3. Liu, Y., Li, Z., Xiong, H., Gao, X., Wu, J. and Wu, S. Understanding and enhancement of internal clustering validation measures. IEEE Transactions on Cybernetics, 2013; 43(3), pp. 982–994.
4. Elbow method (clustering) [Електронний ресурс] — Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Elbow_method_(clustering).
5. Silhouette (clustering) [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Silhouette_(clustering).
6. Davies–Bouldin index [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Davies%E2%80%93Bouldin_index.
7. davies_bouldin_score [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.metrics.davies_bouldin_score.html.

D.O. STUPAK
P.h.d, Academic Degree,
senior data analyst, EPAM Digital, Cherkasy, Ukraine,
stupak0810@gmail.com

DEVELOPMENT OF OBJECT CLUSTERING QUALITY METRIC FOR MULTIDIMENSIONAL SPACES

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-37-45 PACS: 02.50.Sk, 07.05.Mh, 89.75.Fb, 02.70.Rr

In the modern world, new data is generated in geometric progression. Clustering is one of the machine learning methods that does not require labeled data, and therefore makes it possible to quickly determine the structure of the data and draw certain conclusions. The article considers the problem of clustering objects in a multidimensional space. This problem is not new. The concept of the “curse of dimensionality” is critical in clustering, since the algorithm must first divide objects in a multidimensional space into clusters, and then apply clustering quality metrics to find the optimal structure. Existing metrics for assessing the quality of clustering often depend on the dimensionality of the space, and therefore their use under such conditions can be difficult or lead to incorrect results. The aim of the article is to develop a clustering quality metric, the value of which would not depend on the dimensionality of the space in which the objects are described. Two sets of datasets were generated to study clustering. In the first set, the objects are grouped into 5 well-separated clusters, in the second, the clusters almost “touch” each other. Each set contains 6 datasets with a space dimension of 10, 100, 300, 1024, 2048 and 4096. The developed clustering quality metric is based on a comparison of the intercluster characteristic of dividing objects into clusters and the intracluster characteristic. The metric takes into account the dimension of space and the condition of priority of dividing objects into a smaller number of clusters.

Numerical experiment methods were used to prove the effectiveness of the application of the developed clustering quality metric. The test was performed on synthetic datasets that are close in terms of the distribution of objects in existing datasets in practical problems. It is significant that the developed metric of the quality of clustering of objects allows us to determine the correct optimal number of clusters using the “elbow method”, does not depend on the dimensionality of the space and can be applied even in complex cases when the clusters are located close to each other.

Keywords: clustering, multidimensional space, quality metric, elbow method

Одержано редакцією 16.06.2024
Прийнято до друку 22.07.2024

ORCID: 0000-0002-4680-1466
В. В. МОРОЗОВИЧ
викладач кафедри фізики, ННІ ІНФОТЕХ,
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна,
vladmorozua@gmail.com

ORCID: 0000-0001-8267-8365
Д. І. КОЛОМІЄЦЬ
викладач кафедри фізики, ННІ ІНФОТЕХ,
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна,
denyskolomiiets95@gmail.com

ORCID: 0000-0002-4950-394X
А. Р. ГОНДА
аспірант, ННІ ІНФОТЕХ
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна,
andriy.gonda@vu.cdu.edu.ua

ORCID: 0000-0001-7015-1662
Ю. О. ЛЯШЕНКО
доктор фіз.-мат. наук, професор, ННІ ІНФОТЕХ
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна,
lyashenko.yurij@gmail.com

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-46-57 PACS: 44.10.+i, 81.05.Mh, 62.25.De, 72.80.Tm, 81.05.Uf

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРО- та ТЕПЛОПРОВІДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНИХ ЕЛЕКТРОНАГРІВАЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ПЛОСКИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ

Розроблено зразки композитних сендвічподібних електронагрівальних елементів із плоскими електродами із застосуванням модифікованих графітовим та мідним порошками синтетичних клеїв. Проведено випробування та дослідження електричних та теплових характеристик дослідних зразків, що живляться від джерел акумуляторного типу, в різних температурних режимах навколишнього середовища в діапазоні температур від -5 до 25 градусів Цельсія та в залежності від частки множинних механічних пошкоджень.

Ключові слова: електропровідність, теплопровідність, мідний порошок, графітовий порошок, композитні матеріали, електронагрівальний елемент.

1. Вступ

Електронагрівальні елементи знаходять широке застосування в різних сферах народного господарства. В основному, електронагрівачі будуються за принципами, що

підпорядковуються опису законом Джоуля-Ленца. Низькотемпературні нагрівачі тіл можуть мати різні конструктивні рішення, як, наприклад, застосування електричного провідника з певним опором в діелектричному матеріалі основи, або створення плоских полоскових елементів, що під'єднуються до електродів-шин, що знаходяться на протилежних бічних сторонах нагрівальних елементів. Основним недоліком такої конструкції є її вразливість стосовно механічних пошкоджень місць з'єднання нагрівальних елементів до струмопідвідних шин. Це або точкові контакти на кінцях провідного нагрівального елемента, або значна кількість місць під'єднання нагрівальних полосок до струмопровідних шин. В даній роботі описано методику розробки та проведено дослідження електронагрівальних композитних сендвічподібних елементів з плоскими електродами (по всій площі нагрівального елементу), що прогріваються по своїй товщині.

Об'єктом дослідження є електропровідність та тепловиділення композитних структур в залежності від матеріалу наповнювача, властивостей та характеристик електропровідних порошків, типу електродів.

Метою роботи є розоблення методики виготовлення композитних сендвічподібних електронагрівальних елементів із плоскими електродами із застосуванням модифікованих графітовим та мідним порошками синтетичних клеїв.

Основним завданням, що реалізовано в роботі є розроблення способів модифікації синтетичних клеїв за допомогою графітових та металічних порошків для виготовлення композитної структури електронагрівальних елементів з плоскими електродами

Актуальність дослідження полягає в розробці нової методики виготовлення композитних електронагрівальних елементів із використанням графітових та мідних порошків у матриці синтетичного клею, що є важливим для ряду сучасних технічних областей. Значимість цього дослідження полягає в потенціалі підвищити ефективність електронагрівальних елементів, що є особливо важливим у контексті глобальних вимог до енергозбереження та підвищення екологічної стійкості [1-3].

Однією з ключових переваг запропонованої методики виготовлення електронагрівальних елементів є її спроможність забезпечувати електропровідність та тепловиділення композитних структур, що підлягають механічним проникаючим пошкодженням. Це може мати практичне значення для широкого спектру застосувань, включаючи побутові електроприлади, промислове обладнання, системи опалення та навіть високотехнологічні медичні пристрої [2]. Крім того, використання графітових та мідних порошків в композитній структурі сприяє створенню елементів з покращеними фізичними властивостями, такими як міцність, гнучкість, довговічність та стійкість до механічних та теплових пошкоджень [3-5]. Згадані властивості є критично важливими для обладнання, що використовується у важких або екстремальних умовах. Розвиток технологій розроблення композитних електронагрівальних елементів відповідає потребам екологічної стійкості та сталого розвитку [6]. Покращення характеристик електронагрівальних елементів не тільки сприяє зниженню споживання енергії, але й зменшує вуглецевий відбиток продукції, відповідаючи міжнародним стандартам енергоефективності та екологічної безпеки [7-9].

2. Опис методики виготовлення композитних електронагрівальних елементів, функціонально стійких за проникаючих пошкоджень

Опишемо застосовану методику виготовлення композитних електронагрівальних пластин із плоскими електродами, що прогріваються по своїй товщині.

2.1. Підготовка електропровідної речовини для створення композиту

Мідний порошок і графітовий порошок рівномірно змішують, за допомогою механічної мішалки, після чого отриманий двокомпонентний порошок поступово, відповідно до пропорцій (див. Таблицю 1), додається до синтетичного клейового компоненту (в даній роботі для створення композитних нагрівальних елементів застосовується поліуретановий термостійкий клей (ПТК)). Потім проводиться процес перемішування компонентів впродовж 10 хв для забезпечення рівномірного розподілення провідного двокомпонентного порошкового наповнювача по об'єму синтетичного клею. Ця електропровідна суміш в подальшому використовується для просочування та проклеювання прошарків композитної електронагрівальної пластини.

2.2. Етапи виготовлення композитних електронагрівальних елементів на основі синтетичних клеїв

Створення композитних електронагрівальних пластин потребує дотримання розробленої методики для забезпечення необхідних теплових, електрочних та механічних характеристик. Першим елементом сендвічподібної структури електронагрівальних пластин (див. Рис. 1) є алюмінієва фольга (вона слугує одним з електродів та хорошим провідником тепла). Далі, на алюмінієву фольгу накладаються прошарки склотканинної сітки, які рівномірно покриваються електропровідною сумішшю синтетичного клею та графітових і мідних порошків в пропорціях згідно Таблиці 1. В розробленій конструкції між плоскими електродами укладається п'ять прошарків склосітки з відповідним просочуваннях їх електропровідною сумішшю, щоб забезпечити необхідну механічну міцність та структурну стійкість нагрівальних елементів. Кожен прошарок склотканинної сітки орієнтований під різними кутами стосовно сторін комірок. Другим крайнім прошарком композитної структури є алюмінієва сітка, що додатково підвищує міцність та механічну стійкість електронагрівальних пластин, та слугує другим електродом. На завершальній стадії виготовлення електронагрівальної пластини до електродів пластин приварюються контактні дроти електроживлення, до алюмінієвої фольги кріпиться екошкіра (тепловипромінююча сторона) за допомогою синтетичного клею, а до алюмінієвої сітки приклеюється термоізолюючий матеріал.

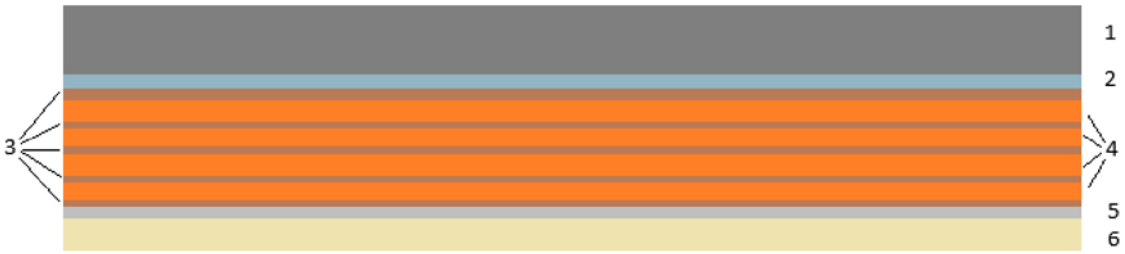


Рис. 1. Схематичне зображення пластини: (1) полотно Normaizol самоклеюче, (2) алюмінієва сітка, (3) композит (Cu/C/ПТК), (4) сітка склотканева (Baustoff), (5) фольга (Al), (6) екошкіра.

Fig. 1. Schematic representation of the plate: (1) Normaizol self-adhesive cloth, (2) aluminum mesh, (3) composite (Cu/C/PTC), (4) fiberglass mesh (Baustoff), (5) foil (Al), (6) eco-leather.Keywords: electric spark sintering, copper, tin, scanning electron microscopy, chemical deposition

Важливим аспектом є підбір технологічних параметрів, таких як розмір/товщина матеріалів, діаметр графітових та мідних порошків, товщина прошарків композитної

структури та оптимальне співвідношення синтетичного клею (ПТК) та модифікуючих його графітового та мідного порошків, що забезпечують необхідні характеристики електронагрівальних пластин.

Завершальним етапом виготовлення електронагрівальних пластин є полімеризація зразка, для цього зразок поміщається в витяжну шафу під прес із каналами доступу повітря для проведення повної полімеризації модифікованого порошками ПТК. Використання пресу необхідне для отримання електронагрівальних пластин рівномірної товщини. Процес полімеризації електропровідної суміші на основі ПТК відбувається за кімнатної температури та відносної вологості повітря 40-60 відсотків.

3. Результати досліджень електронагрівальних елементів

Після виготовлення зразків композитних електронагрівальних пластин проводилися вимірювання температури їх поверхні (як локально за допомогою термопари так і з застосуванням тепловізора для визначення теплового поверхневого температурного профілю) та параметрів електроспоживання.

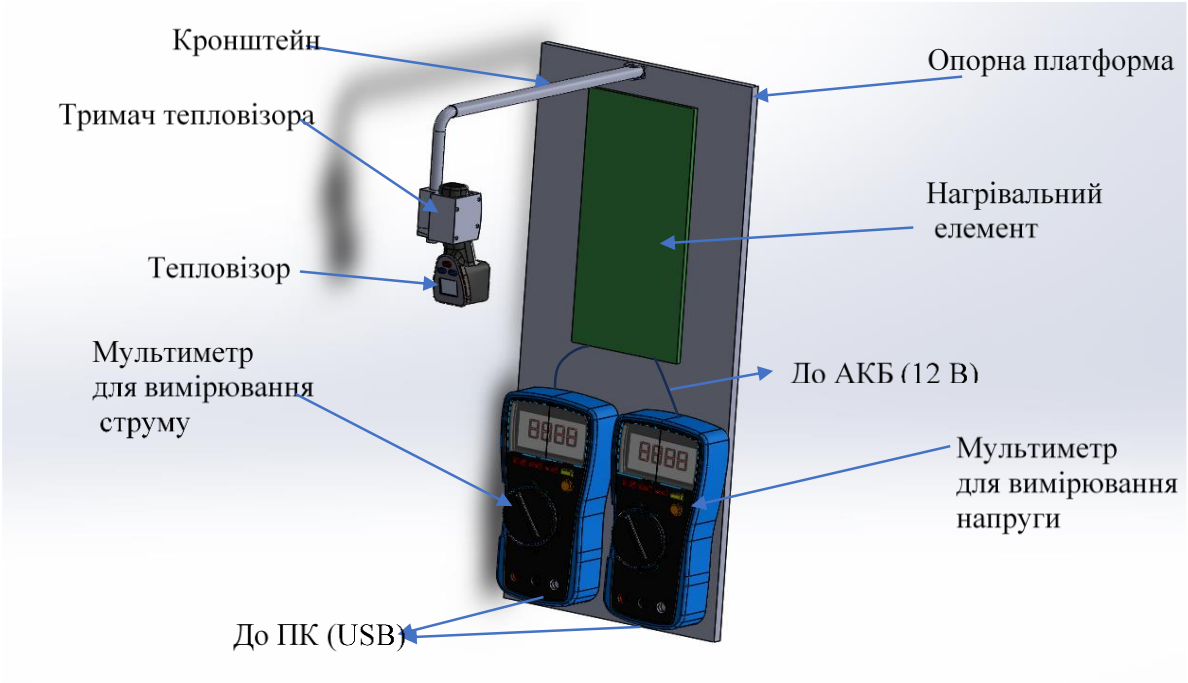


Рис. 2. Принципова схема стенду для вимірювань електричних та температурних величин електронагрівальних елементів.

Fig. 2. Schematic diagram of the stand for measuring electrical and temperature values of electric heating elements.

Експерементальні дослідження характеристик розроблених електронагрівальних пластин проводилися за кімнатної температури та електроживлення від акумулятора (12,4 В) за допомогою розробленого стенду для вимірювань (див. Рис 2). Результати аналізу отриманих даних (див. Таблицю 1) вказують на значий вплив концентрації та вмісту графітових та мідних порошків на характеристики електронагрівання пластин.

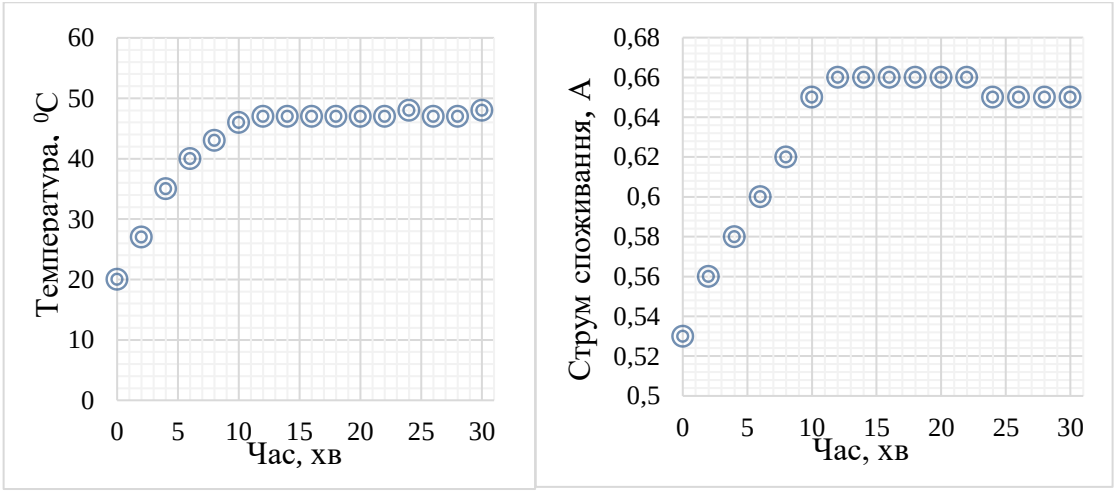
Таблиця 1. Залежність характеристик електронагрівальних пластин від співвідношення компонентів суміші порошків та ПТК
Table 1. Dependence of the characteristics of electric heating plates on the ratio of components of the mixture of powders and PTC

№ зразка	Розміри пластин, м*м	Cu (ПМС-1) г.	C (ГК-1) г.	ПТК мл.	U (V)	I (A)	T (°C)
1	0,15x0,15	10	5	70	12.74	—	20
2	0,15x0,15	7,9	7,5	70	12.74	—	20
3	0,15x0,15	5	10	70	12.74	0,14	22
4	0,15x0,15	5	15	70	12.74	5,4	>100
5	0,15x0,15	3	12	80	12.74	0,63	43.7
6	0,15x0,15	2,5	12,5	80	12.74	0,65	44
7	0,15x0,15	2	13	80	12.74	0,72	50.2

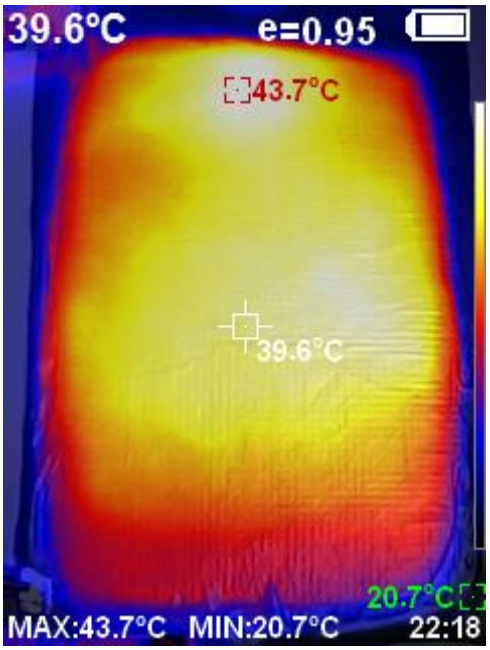
У таблиці 1 наведено параметри досліджуваних електронагрівальних пластин, включаючи їхні розміри, вміст комерційного порошку міді (ПМС-1) та комерційного порошку графіту (ГК-1), вміст поліуретанового термостійкого клею (ПТК), а також зазначено прикладену напругу U(B), струм I(A), що споживають електронагрівальні пластини, а також вказана температура T(°C), до якої розігріваються досліджувані електронагрівальні пластини протягом 15 хвилин. Зокрема, визначено, що оптимальне співвідношення мідного та графітового порошків не повинно перевищувати 1 до 4 відповідно.

Проведення вимірів теплових та електричних характеристик проводилося за кімнатної температури протягом 30 хвилин, що необхідно для перевірки стабільності температурного режиму роботи пластин, який встановлювався за перші 15 хвилин після підключення до джерела електроживлення.

Результати встановлення стаціонарного температурного режиму зразків 5-6 (див. Таблицю 1) за кімнатної температури навколишнього середовища 20 градусів Цельсія після підключення до джерела живлення приведені на рисунках 3-5.



а б

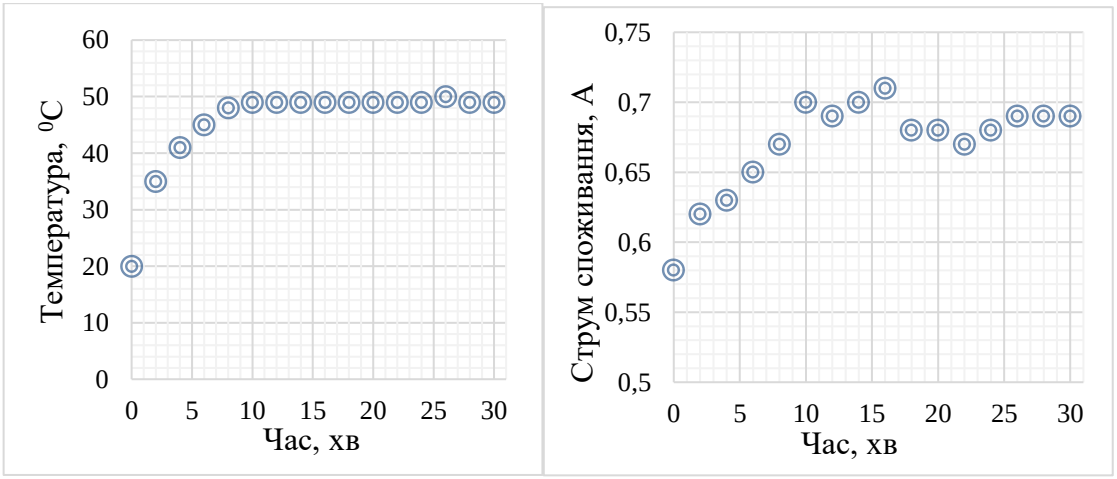


в

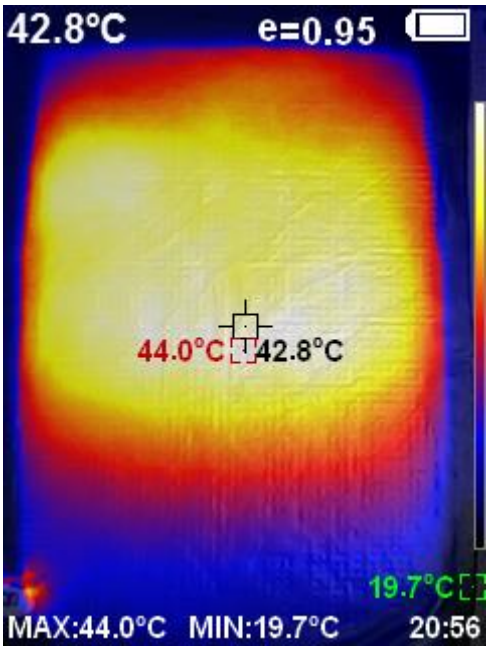
Рис. 3. Залежність зміни в часі параметрів зразка 5 після підключення до постійного джерела струму 12,4 В впродовж 30 хв: а) зміна температури на поверхні дослідного зразка 5 від часу; б) зміна сили струму споживання від часу; в)розподілу температурного поля на поверхні зразка 5

Fig. 3. Time dependence of the parameters of sample 5 after connection to a constant current source of 12.4 V for 30 min: a) temperature change on the surface of the test sample 5 with time; b) change in the current consumption with time; c) temperature field distribution on the surface of sample 5

5



а б

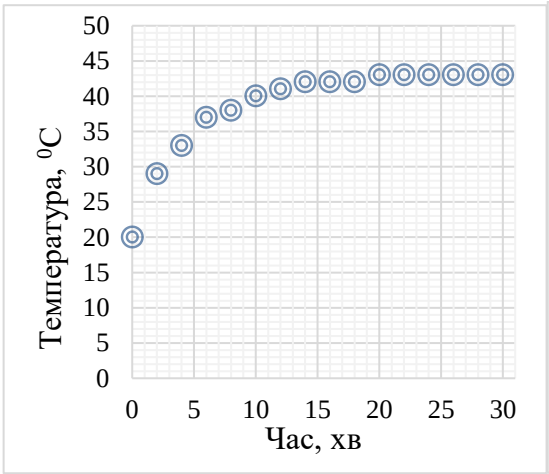


в

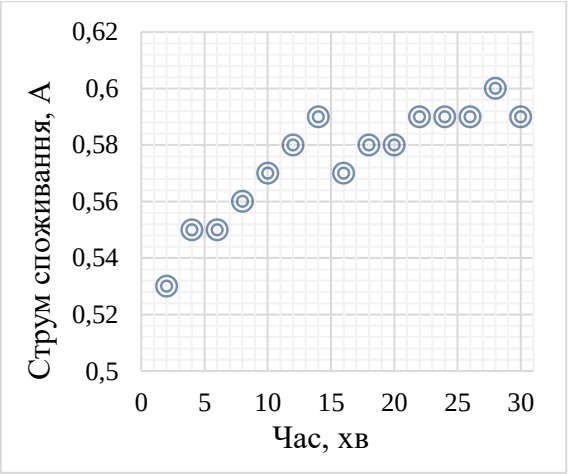
Рис. 4. Залежність зміни в часі параметрів зразка 6 після підключення до постійного джерела струму 12,4 В впродовж 30 хв: а) зміна температури на поверхні дослідного зразка 6 від часу; б) зміна сили струму споживання від часу; в)розподілу температурного поля на поверхні зразка 6

Fig. 4. Time dependence of the parameters of sample 6 after connection to a constant current source of 12.4 V for 30 min: a) temperature change on the surface of the test sample 6 with time; b) change in the current consumption with time; c) temperature field distribution on the surface of sample 6

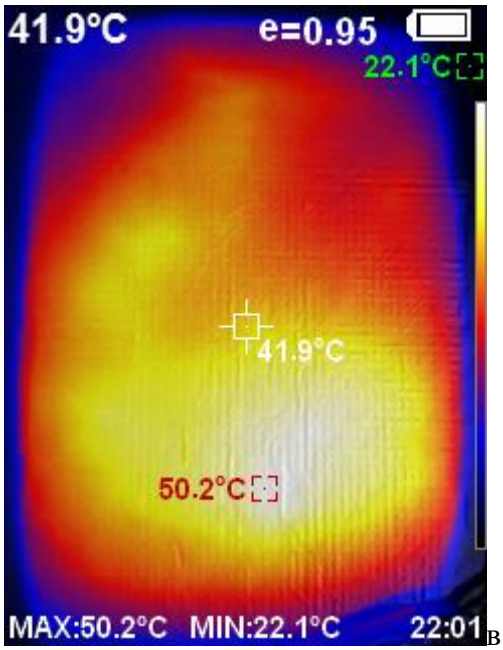
6



а



б



в

Рис. 5. Залежність зміни в часі параметрів зразка 7 після підключення до постійного джерела струму 12,4 В впродовж 30 хв: а) зміна температури на поверхні дослідного зразка 7 від часу; б) зміна сили струму споживання від часу; в)розподілу температурного поля на поверхні зразка 7

Fig. 5. Time dependence of the parameters of sample 7 after connection to a constant current source of 12.4 V for 30 min: a) temperature change on the surface of the test sample 7 with time; b) change in the current consumption with time; c) temperature field distribution on the surface of sample 7

Отже, експериментальні дослідження дослідних зразків вказують, що для досягнення оптимальних технічних характеристик композитних електронагрівальних пластин з плоскими електродами потрібно дотримуватись певних пропорцій компонентів, що відповідають зразкам 5-6 (див. Таблиця 1).

Таким чином, в роботі розроблено та досліджено характеристики композитних електронагрівальних елементів з плоскими електродами, що забезпечують нагрівання від джерела акумуляторного типу (12 В) до температури близько 40 градусів Цельсія. Розроблені композитні сендвічподібні електронагрівачі, що живляться від джерел акумуляторного типу, забезпечують технічні характеристики: номінальна напруга живлення 12 В, питома електрична потужність 300-400 Вт/м2; час нагріву до робочої температури (до 40 градусів Цельсія) не більше 15 хв (за температури навколишнього середовища 15 градусів Цельсія).

4. Висновки

Розроблено дослідну конструкцію сендвічподібних композитних електронагрівальних елементів з плоскими електродами, що необхідно для забезпечення максимальної стійкості електронагрівальних елементів стосовно множинних пошкоджень поверхні. Прогрівання таких елементів відбуватися по товщині між плоскими електродами, до яких електрична напруга підводитися в захищених від механічних пошкоджень місцях. Для забезпечення механічної міцності та стійкості до механічних пошкоджень розроблених композитних електронагрівачів здійснено підбір типу плоских електродів (матеріал, конструктивні особливості), підбір структури проміжних прошарків для забезпечення контролю товщини нагрівального

елемента, підбір складу та властивостей електропровідного композиту на основі синтетичного клею, графітових та мідних порошків. Для виготовлення дослідних зразків композитних електронагріачів виконано підбір матеріалу порошків (мідь, графіт), розміру порошинок, їхнього співвідношення, масової частки електропровідної композиції в наповнювачах на основі синтетичного клею. Проведено експериментальні дослідження характеристик композитних електронагрівальних елементів з плоскими електродами, що дозволило встановити необхідні співвідношення компонентів електропровідної суміші для забезпечення нагрівання електропластин до 40 градусів Цельсія.

Подяки

Дослідження проведено в рамках виконання Науково-технічної розробки, що підримана МОН України, № держреєстрації 0123U104477.

Список використаної літератури:

1. Kim T. Carbon fiber mats as resistive heating elements / T. Kim, D. D. L. Chung // *Carbon.* – 2003, Vol. 41, №12. – P. 2436-2440. – Режим доступу: https://doi.org/10.1016/S0008-6223(03)00288-4
2. Falzon B. G. Development and evaluation of a novel integrated anti-icing/de-icing technology for carbon fibre composite aerostructures using an electro-conductive textile / B. G. Falzon, P. Robinson, S. Frenz, B. Gilbert // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. – 2015. – № 68. – P. 323-335. – Режим доступу: https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2014.10.023
3. Klingeler R. Carbon nanotube based biomedical agents for heating, temperature sensoring and drug delivery/ R. Klingeler, S. Hampel, B. Büchner // *International journal of hyperthermia*. – 2008. – Vol. 24, №6. – P. 496-505. – Режим доступу: https://doi.org/10.1080/02656730802154786
4. Philip B. Material and process optimization screen printing carbon graphite pastes for mass production of heating elements/ B. Philip, E. Jewell, P. Greenwood, C. Weirman // *Journal of Manufacturing Processes*. – 2016. – № 22. – P. 185-191. – Режим доступу: https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2016.03.001
5. Колосов О. Технології композиційних матеріалів / О. Колосов // Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 258 с. – Режим доступу: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/30176
6. Свістільнік Р. Розробка технології електропровідних гібридних композиційних покриттів / Р. Свістільнік // *Технології та інжиніринг.* – 2022. – Том. 4, №9. – С. 60-70. – Режим доступу: https://doi.org/10.30857/2786-5371.2022.4.5
7. Mamunya Y. P. Thermal and electrical conductivity of the polymer-metal composites with 1D structure of filler formed in a magnetic field / Y. P. Mamunya, V. V. Levchenko, I. M. Parashchenko, E. V. Lebedev // *Polymer J (Ukraine)*. – 2016. – Vol.38, №1. – P. 3-17. – Режим доступу: https://doi.org/10.15407/polymerj.38.01.003
8. Свістільнік Р. Ф. Вплив полімерних матриць на електричні властивості композитних покриттів / Р. Ф. Свістільнік, Т. Р. Федорів // T*echnologies and Engineering*. –2023. – №5. – P. 115-122. – Режим доступу: https://doi.org/10.30857/2786-5371.2023.5.10
9. Бутенко О. О. Застосування графітів в електропровідних полімерних композитах/ О. О. Бутенко, О. В. Черниш, Ю. О. Кубай, В. Г. Хоменко, В. З. Барсуков, Я. А. Куриптя // *Technologies and Engineering*. – 2022. – №6. – С. 72-81. – Режим доступу: https://doi.org/10.30857/2786-5371.2022.6.7

10. Lyashenko Y. O. New approach to effective diffusion coefficient evaluation in the nanostructured two-phase media / Y. O. Lyashenko, O. Y. Liashenko, V. V. Morozovich // *Applied Nanoscience*. – 2019. – №9. – P. 1025-1036. – Режим доступу: https://doi.org/10.1007/s13204-018-0731-y
11. Behbahani A. F. Electrical percolation behavior of carbon fiber and carbon nanotube polymer composite foams: Experimental and computational investigations / A. F. Behbahani, G. H. Motlagh, M. Ziaee, G. Nikravan // *Journal of Applied Polymer Science*. –2015. – Vol. 132, №42. – Режим доступу: https://doi.org/10.1002/app.42685
12. Yat C. H. Investigation on buffon-laplace needle problem / C. H. Yat, F. P. Kiu, L. S. Him, L. K. C. Justin, T. S. Lam, C. Man // – 2021. – Режим доступу: https://hlma.hanglung.com/getattachment/f46f7ae5-2afb-4df5-996b-5eedd47996a3/17-hm_wyk.pdf
13. Arnow B. J. On Laplace's extension of the Buffon needle problem / B. J. Arnow // *The College Mathematics Journal*. – 1994. – Vol. 25, №1. – P. 40-43. – Режим доступу: https://doi.org/10.1080/07468342.1994.11973580

References:

1. Kim, T., & Chung, D. D. L. (2003). Carbon fiber mats as resistive heating elements. *Carbon, 41(12),* 2436-2440. Retrieved from https://doi.org/10.1016/S0008-6223(03)00288-4
2. Falzon, B. G., Robinson, P., Frenz, S., & Gilbert, B. (2015). Development and evaluation of a novel integrated anti-icing/de-icing technology for carbon fibre composite aerostructures using an electro-conductive textile. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 68,* 323-335. Retrieved from https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2014.10.023
3. Klingeler, R., Hampel, S., & Büchner, B. (2008). Carbon nanotube based biomedical agents for heating, temperature sensoring and drug delivery. *International journal of hyperthermia, 24(6),* 496-505. Retrieved from https://doi.org/10.1080/02656730802154786
4. Philip, B., Jewell, E., Greenwood, P., & Weirman, C. (2016). Material and process optimization screen printing carbon graphite pastes for mass production of heating elements. *Journal of Manufacturing Processes, 22,* 185-191. Retrieved from https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2016.03.001
5. Kolosov O. Technologies of composite materials. (2019) Kyiv: *Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute*, 258 с. Retrieved from https://ela.kpi.ua/handle/123456789/30176
6. Svistsilnik, R., Fedoriv, T., Savchenko, B., & Osaulenko, S. (2022). Development of technology for conductive hybrid composite coatings. *Technologies and Engineering, (4),* 60-70. Retrieved from https://doi.org/10.30857/2786-5371.2022.4.5
7. Mamunya, Y. P., Levchenko, V. V., Parashchenko, I. M., & Lebedev, E. V. (2016). Thermal and electrical conductivity of the polymer-metal composites with 1D structure of filler formed in a magnetic field. *Polymer J (Ukraine), 38(1),* 3-17. Retrieved from https://doi.org/10.15407/polymerj.38.01.003
8. Svistsilnik, R., & Fedoriv, T. (2023). The influence of polymer matrices on the electrical properties of composite coatings. T*echnologies and Engineering, (5),* 115-122. Retrieved from https://doi.org/10.30857/2786-5371.2023.5.10
9. Butenko, O., Chernysh, O., Kubay, Y. O., Khomenko, V., Barsukov, V., & Kuryptya, Y. A. (2022). Application of graphites in conductive polymer composites. *Technologies and Engineering, (6),* 72-81. Retrieved from https://doi.org/10.30857/2786-5371.2022.6.7

10. Lyashenko, Y. O., Liashenko, O. Y., & Morozovich, V. V. (2019). New approach to effective diffusion coefficient evaluation in the nanostructured two-phase media. *Applied Nanoscience, 9*, 1025-1036. Retrieved from https://doi.org/10.1007/s13204-018-0731-y
11. Behbahani, A. F., Motlagh, G. H., Ziaee, M., & Nikravan, G. (2015). Electrical percolation behavior of carbon fiber and carbon nanotube polymer composite foams: Experimental and computational investigations. *Journal of Applied Polymer Science, 132(42)*. Retrieved from https://doi.org/10.1002/app.42685
12. Yat, C. H., Kiu, F. P., Him, L. S., Justin, L. K. C., Lam, T. S., & Man, C. (2021). Investigation on buffon-laplace needle problem. Retrieved from https://hlma.hanglung.com/getattachment/f46f7ae5-2afb-4df5-996b-5eedd47996a3/17-hm_wyk.pdf
13. Arnow, B. J. (1994). On Laplace's extension of the Buffon needle problem. *The College Mathematics Journal, 25(1)*, 40-43. Retrieved from https://doi.org/10.1080/07468342.1994.11973580

V. V. MOROZOVYCH
Lecturer of the Department of Physics,
The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,
vladmorozua@gmail.com

D. I. KOLOMIIETS
Lecturer of the Department of Physics,
The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,
denyskolomiiets95@gmail.com

A. R. HONDA
PhD-student,
Educational-Scientific Institute of Informational and Eduational Technologies
The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine
andriy.gonda@vu.cdu.edu.ua

YU. O. LYASHENKO
doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Educational-Scientific Institute of Informational and Eduational Technologies
The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,
lyashenko.yurij@gmail.com

INVESTIGATION OF ELECTRICAL AND THERMAL CONDUCTIVE PROPERTIES OF COMPOSITE HEATING ELEMENTS WITH FLAT ELECTRODES

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-46-57 PACS: 44.10.+i, 81.05.Mh, 62.25.De, 72.80.Tm, 81.05.Uf

The paper describes the manufacturing method and design of sandwich-like composite electric heating elements with flat electrodes based on synthetic polyurethane adhesives. Heating of the composite elements occurs through the thickness between the flat electrodes, to

which electric voltage is supplied at locations protected from mechanical damage. This design ensures maximum durability of the heating elements against multiple penetrating damages.

To fabricate a sandwich-like composite structure resistant to mechanical damage, the following aspects were optimized: the type of flat electrodes (material and design features); the structure of intermediate layers to control the thickness of the heating element; and the composition and properties of the electrically conductive composite made from graphite and metal powders. Materials for the powders (copper and graphite), particle sizes, their ratios, and the mass fraction of the conductive composition in the polyurethane adhesive-based matrix with reinforcing synthetic layers were selected.

The main requirements for composite heating elements based on synthetic adhesives include: the ability to bond all flat components and intermediate layers; suitable electrical conductivity to ensure heating from a battery-type power source (12 V) up to about 40°C; uniform thickness of the heating elements, which determines the homogeneity of the generated thermal profile; and sufficient mechanical strength.

The developed composite sandwich heating elements powered by battery-type sources demonstrate the following technical characteristics: nominal supply voltage of 12 V, specific electrical power of 300–400 W/m², and a heating time to the working temperature (up to 40°C) of no more than 15 minutes (at an ambient temperature of 15°C).

Keywords: electrical conductivity, thermal conductivity, copper powder, graphite powder, composite materials, electric heating element.

Одержано редакцією 14.07.2024
Прийнято до друку 03.09.2024

ORCID: 0000-0001-5885-2079
Є. В. ТАТАРЧУК
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри фізики,
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна,
etatar@ukr.net

ORCID: 0000-0002-8434-1544
М. О. ПАСІЧНИЙ
кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри фізики,
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна,
pasichnyy@ukr.net

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-58-67 PACS: 66.30.−h, 68.35.Fx, 64.70.dm, 81.05.Bx, 81.30.Bx

ВПЛИВ ОБРОБКИ МІДНОЇ ПІДЛОЖКИ НА ПОРИСТІСТЬ ІНТЕРМЕТАЛЕВОЇ ФАЗИ Cu_3Sn ПРИ РЕАКЦІЙНІЙ ДИФУЗІЇ У СИСТЕМІ Cu-Sn

У статті представлено результати експериментального дослідження впливу попередньої обробки мідної підложки на формування пор у фазі Cu_3Sn, що утворюється під час реакційної дифузії в системі Cu-Sn. Досліджено три типи мідних підложок: після рекристалізаційного відпалу, після обробки методом ультразвукової пластичної деформації поверхні (SMAT), а також без попередньої обробки. Формування інтерметалевих фаз Cu_3Sn і Cu_6Sn_5 досліджено методом растрової електронної мікроскопії. Пористість у фазі Cu_3Sn оцінено кількісно на основі аналізу SEM-зображень. Встановлено, що SMAT-обробка значно підвищує рівень пористості порівняно з іншими типами підготовки підложки. Отримані результати можуть бути використані для оптимізації технологій формування інтерметалевих з'єднань у мікроелектроніці.

Ключові слова: система Cu-Sn, фаза Cu_3Sn, реакційна дифузія, пористість, SMAT, паяні з'єднання.

1. Вступ

Система Cu-Sn активно досліджується в контексті створення надійних паяних з'єднань у мікроелектроніці, де ключову роль відіграють інтерметалеві фази Cu_3Sn та Cu_6Sn_5. Під час реакційної дифузії на межі Cu-Sn формуються проміжні фази, структура й морфологія яких істотно впливають на довговічність і надійність з'єднання. Одним із чинників деградації є утворення пор у фазі Cu_3Sn, які можуть знижувати як механічну міцність, так і електропровідність інтерфейсу [6, 9].

Раніше було встановлено, що пороутворення та морфологія фаз залежать від попередньої обробки міді, зокрема від зеренної структури, що формується внаслідок термічного або механічного впливу [4, 5]. При цьому, кількісне дослідження цього впливу за умов контрольованого ізотермічного відпалу залишається недостатньо вивченим.

У дослідженнях багатокомпонентних систем Cu-Ni-Sn, Cu-Sn-Zn показано, що структурні дефекти, домішки та міжфазні прошарки істотно впливають на морфологію інтерметалевих фаз та ймовірність формування пор [6, 7, 10, 11]. Зокрема, моделі росту пор, розвинені у роботах [8], враховують асиметрію дифузії та вплив мікроструктури підложки на механізм пороутворення.

SMAT-обробка (Surface Mechanical Attrition Treatment) є ефективним способом модифікації поверхні металів, що призводить до формування дрібнозернистої поверхневої структури, збільшення площі міжзеренних меж та підвищення щільності дефектів [1-3]. Це, у свою чергу, може впливати на кінетику росту інтерметалевих фаз і впливати на зміну механізмів масоперенесення.

Метою даної роботи є експериментальне дослідження впливу попередньої SMAT-обробки мідної підложки на ріст фази Cu_3Sn та формування мікропор під час реакційної дифузії у системі Cu-Sn.

2. Постановка експерименту

У якості матеріалу для підложок використовувалася технічно чиста мідь товщиною 3 мм. Зразки виготовляли у формі пластин розмірами 5 мм × 10 мм. Було підготовлено три серії мідних зразків:

- Необроблені зразки – контрольна група, поверхня яких не зазнавала попередньої термічної або механічної обробки.
- Зразки після рекристалізаційного відпалу – піддавалися термообробці при температурі 700 °C протягом 5 годин для формування рекристалізованої мікроструктури.
- Зразки після SMAT-обробки. Зразки після рекристалізаційного підпалу піддавалися обробці протягом 10 хвилин з використанням спеціального ультразвукового пристрою (див. [1, 2]) для формування дрібнозернистого поверхневого шару шляхом ударної дії сталевих кульок.

Перед нанесенням олова всі зразки піддавалися механічному поліруванню та електролітичному очищенню для забезпечення однакової чистоти поверхні. Підготовка дифузійних пар Cu-Sn здійснювалася шляхом нанесення прошарку олова на мідну підложку. Для цього мідну пластину занурювали у розігрітий до 350 °C флюс, витримували протягом 2 хвилин, після чого на її поверхню накладали пластину олова. Температура процесу контролювалася за допомогою термопари та електронного термометра.

Після плавлення олова та формування покриття зразки дифузійних пар одразу охолоджували до кімнатної температури, промивали спиртом для видалення залишків флюсу та висушували.

Для реалізації реакційної дифузії з утворенням фаз Cu_3Sn та Cu_6Sn_5 зразки піддавали ізотермічному відпалу при температурі 230 °C протягом 48 годин в атмосфері аргону.

3. Обробка експериментальних результатів

Підготовлені мікрошліфи поперечних перерізів дифузійних пар Cu-Sn, з різними типами мідної підложки, після ізотермічного відпалу досліджувалися за допомогою скануючої електронної мікроскопії (SEM). Для аналізу використовували зображення, отримані у режимі зворотно розсіяних електронів (BSE). Морфологію фаз та пор аналізували на основі серії мікрофотографій, попередньо оброблених за допомогою програмного забезпечення Adobe Photoshop для візуального виділення областей фази Cu_3Sn та окремо пор у її структурі. Виділення областей пор і інтерметалевих фаз здійснювалося за допомогою інструменту «Polygonal Lasso Tool» на основі контрасту. Після виділення контурів, Photoshop автоматично відображає кількість пікселів у межах виділених областей. Таким чином, було визначено ефективну площу фаз Cu_3Sn та відповідних пор у їх межах. Цей метод дозволив порівняти результати для всіх типів мідних підложок в уніфікованих умовах.

На рис. 1 наведено SEM-зображення поперечного перерізу дифузійної пари Cu-Sn з підложкою на основі рекристалізованої міді. На зображенні чітко ідентифікуються чотири послідовні прошарки: мідна підложка, фаза Cu_3Sn, фаза Cu_6Sn_5 та олово. Область фази Cu_3Sn обмежена пунктирною лінією. На рис. 2 показано те саме зображення з виділеними порами у фазі Cu_3Sn. За результатами аналізу зображень визначено ефективну площу фази Cu_3Sn та пор у межах цієї фази. Для даного зразка площа пор становила 347 пікселів, площа самої фази Cu_3Sn – 104350 пікселів, що відповідає пористості близько 0,33 %.

На рис. 3 та рис. 4 наведено аналогічні зображення для зразка з мідною підложкою після SMAT-обробки. За результатами аналізу SEM-зображень площа пор становила 3099 пікселів, а площа фази Cu_3Sn – 111 497 пікселів, що відповідає відносній пористості 2,78 %.

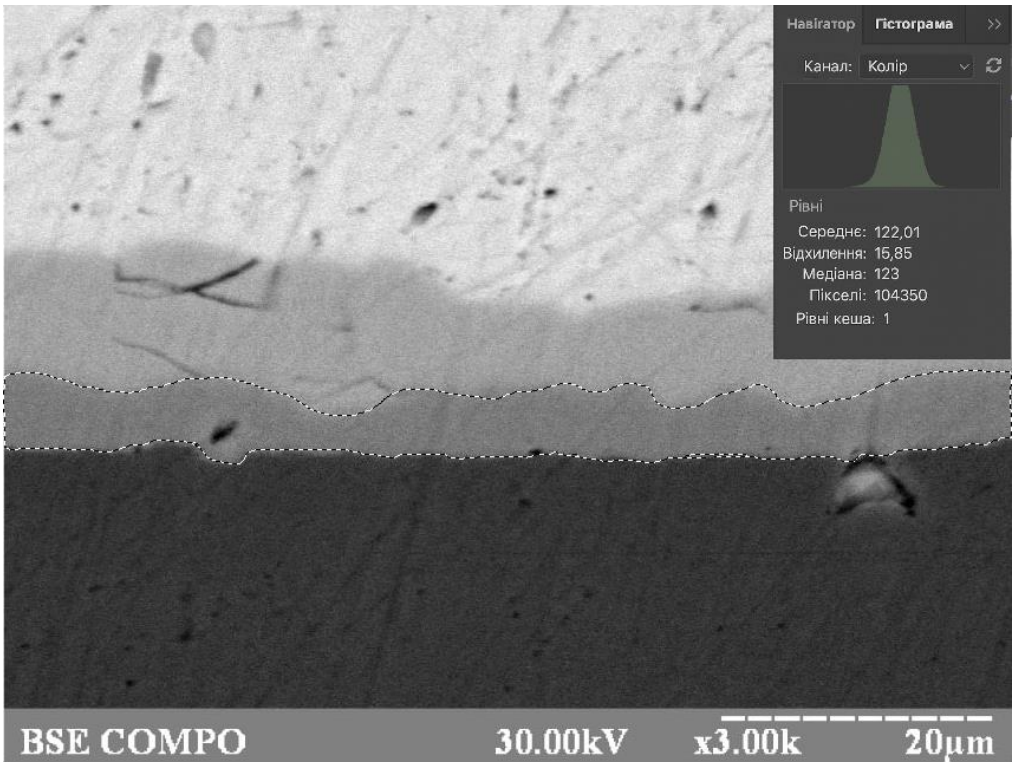


Рис. 1. РЕМ-зображення поперечного перерізу дифузійної пари Cu-Sn з виділеною фазою Cu_3Sn. Підложка: мідь після рекристалізаційного відпалу.
Fig. 1. SEM image of the cross-section of a Cu-Sn diffusion couple with a distinct Cu_3Sn phase. Substrate: copper after recrystallization annealing.

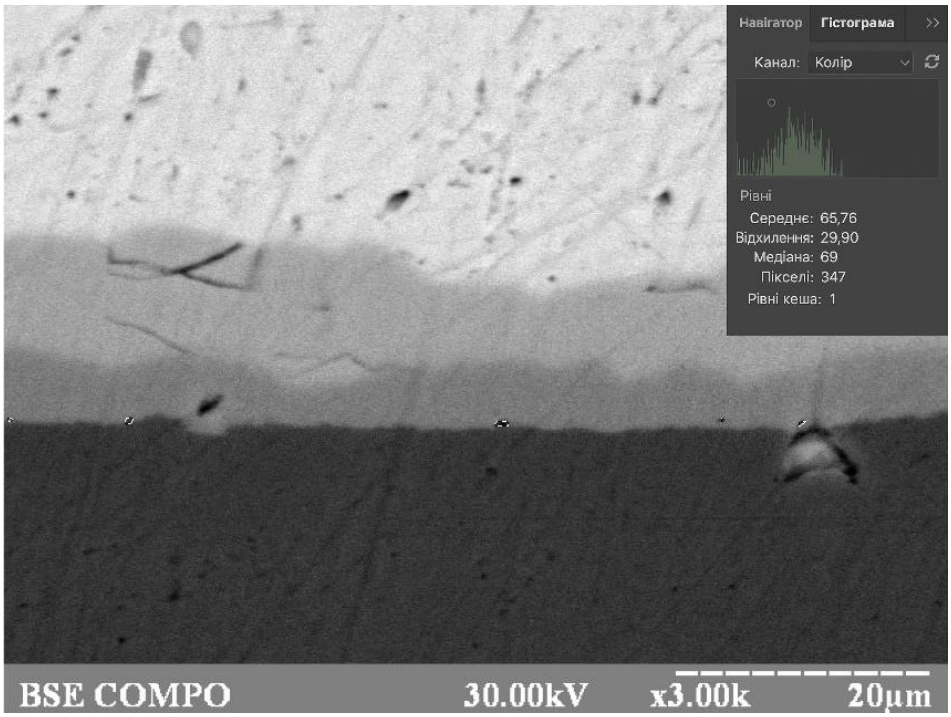


Рис. 2. РЕМ-зображення поперечного перерізу дифузійної пари Cu-Sn з виділеними порами у фазі Cu_3Sn. Підложка: мідь після рекристалізаційного відпалу.
Fig. 2. SEM image of the cross-section of a Cu-Sn diffusion couple with distinct pores in the Cu_3Sn phase. Substrate: copper after recrystallization annealing.

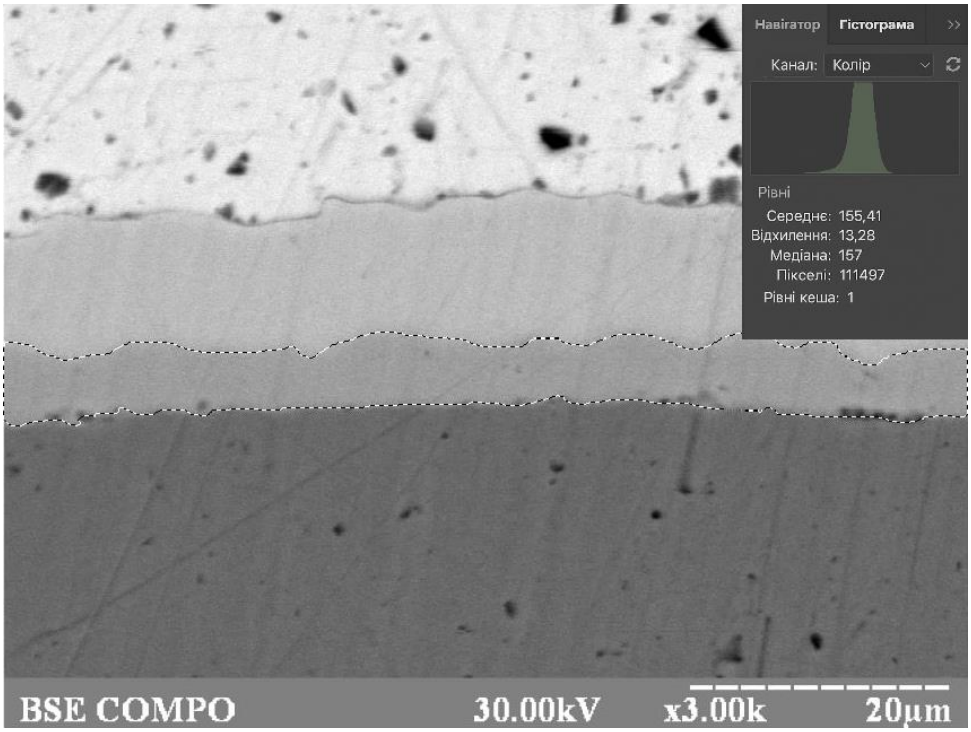


Рис. 3. РЕМ-зображення поперечного перерізу дифузійної пари Cu-Sn з виділеною фазою Cu_3Sn. Підложка: мідь оброблена за SMAT технологією.
Fig. 3. SEM image of the cross-section of a Cu-Sn diffusion couple with a distinct Cu_3Sn phase. Substrate: copper treated using SMAT technology.

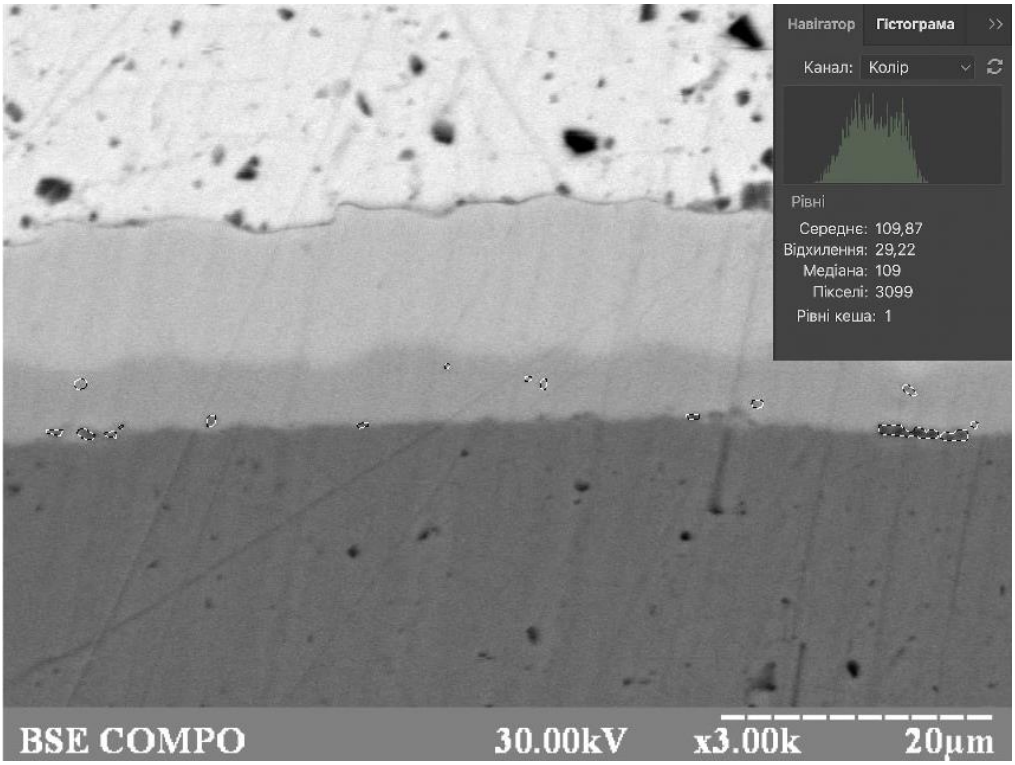


Рис. 4. РЕМ-зображення поперечного перерізу дифузійної пари Cu-Sn з виділеними порами у фазі Cu_3Sn. Підложка: мідь оброблена за SMAT технологією.
Fig. 4. SEM image of the cross-section of a Cu-Sn diffusion couple with distinct pores in the Cu_3Sn phase. Substrate: copper treated using SMAT technology.

Для всіх дослідних зразків, за наведеним вище алгоритмом, було визначено співвідношення площі пор до площі фази у відсотках. Таким чином було отримано наступні результати, частка пор у фазі Cu3Sn становить: для рекристалізованої міді – 0,23 %, для необробленої міді – 0,35 %, для міді після SMAT-обробки поверхні – 2,77 %. Середні значення розмірів фаз, пор та їх співвідношення представлені у таблиці 1. Слід зазначити, що для всіх зразків, з метою набору статистичних даних, було оброблено серії з 10 зображень для кожного типу зразків.

Таблиця 1. Частка пор у фазі Cu3Sn
Table 1. Pore fraction in the Cu_3Sn phase

Тип мідної підложки	**Середнє значення площі пор у пікселях**	**Середнє значення площі фази Cu3Sn у пікселях**	**Частка пор у фазі Cu3Sn (%)**
Необроблена	371	105358	0,35
Після рекристалізаційного відпалу	243	103678	0,23

Після SMAT-обробки	3112	112156	2,77

4. Обговорення результатів

Отримані експериментальні дані свідчать про те, що попередній стан мікроструктури мідної підложки істотно впливає на формування пористості в інтерметалевій фазі Cu_3Sn під час реакційної дифузії в системі Cu-Sn. Аналіз SEM-зображень показав, що найвищий рівень пористості (2,77 %) спостерігається у зразках із поверхнею, обробленою методом SMAT, тоді як у зразках після рекристалізаційного відпалу цей показник становить лише 0,23 %.

Підвищене пороутворення в зразках, оброблених за технологією SMAT, можна пояснити низкою факторів:

- Збільшення площі міжзеренних меж, спричинене подрібненням зерен у поверхневому шарі, підвищує швидкість дифузії. У результаті відбувається пришвидшення дифузії атомів міді у бік олова, що призводить до асиметричної дифузії та формування пор за механізмом Кіркендалла [6, 8].

- SMAT-обробка зумовлює підвищену щільність дефектів кристалічної решітки, зокрема дислокацій і вакансій, які функціонують як шляхи швидкої дифузії [1, 2]. Це пришвидшує ріст фаз та сприяє локальному накопиченню пор.

- Зразки після рекристалізаційного відпалу характеризуються більшими розмірами зерен і меншою концентрацією дефектів, що пояснює зменшення пористості фази Cu_3Sn.

Отримані результати узгоджуються з відомими моделями росту міжфазних прошарків і пороутворення в бінарних системах [7, 8], згідно з якими швидкість росту інтерметалевих фаз та утворення пустот залежать від мікроструктури підложки, домішок, наявності внутрішніх меж і анізотропії дифузії.

Важливо зазначити, що наявність пор у фазі Cu_3Sn не лише погіршує механічну цілісність паяного з'єднання, а й може знижувати його електропровідність, що критично для мікро- та наноелектронних застосувань. Таким чином, контроль попередньої обробки підложки є важливим інструментом інженерії інтерфейсів у мікроелектроніці.

Порівняння з літературними даними [6, 9-11] підтверджує, що пороутворення є результатом асиметричного дифузійного процесу, активізованого змінами мікроструктури підложки. Кількісна оцінка впливу SMAT-методу на пористість фази Cu_3Sn, отримана у даній роботі, може бути використана для подальшого дослідження процесів реакційної дифузії в системах на основі Cu-Sn.

Висновки

Структура мідної підложки суттєво впливає на пористість інтерметалевої фази Cu_3Sn, яка формується під час реакційної дифузії у системі Cu-Sn. Зокрема, попередня обробка поверхні впливає на механізм масопереносу та умови росту фаз. Найменший рівень пористості (0,23 %) зафіксовано у зразках з рекристалізованою міддю, що пояснюється зменшеною щільністю дефектів і більшим розміром зерен. Для необробленої міді цей показник становить 0,35 %, а для підложки, обробленої за технологією SMAT – 2,77 %. Високий рівень пористості після SMAT-обробки підложки зумовлений подрібненням зерен, збільшенням площі міжзеренних меж та накопиченням дефектів.

Отримані результати можуть бути використані при розробці технологій формування з'єднань у мікро- та наноелектроніці, а також у подальших дослідженнях

процесів реакційної дифузії у системі Cu-Sn. Наявність пор у фазі Cu_3Sn може істотно змінити експлуатаційні властивості паяного з'єднання – зменшити його механічну міцність і електропровідність. Вплив на структуру підложки на етапі підготовки до нанесення припою є одним із засобом інженерії інтерфейсів у мікроелектроніці.

Список використаної літератури:

1. Дерев'янко С. І., Морозович В. В., Красовський Т. А., Ляшенко Ю. О. Вплив обробки поверхні за технологією SMAT на механічні властивості поверхневих шарів міді // Вісник Черкаського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2019, № 1. – С. 60-68. – Режим доступу: https://doi.org/10.31651/2076-5851-2019-1-60-68
2. Тютенко В. М., Морозович В. В., Дідук В. А., Колінько С. О., Ляшенко Ю. О. Вплив SMAT обробки на структуру електроосаджених в стацонарному, реверсному та стохастичному режимах прошарків міді // Вісник Черкаського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2017. – № 1. – С. 63-78. – Режим доступу: https://phys-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/2334/2406
3. Приходько В. І. та ін. Створення ультразвукового обладнання для зміцнення та релаксаційної обробки зварних конструкцій у вагонобудуванні // Наука та інновації. – 2014. – Т. 10, № 1. – С. 5–17. – Режим доступу: https://doi.org/10.15407/scin10.01.005
4. Татарчук Є. В., Галат І. Г. Вплив розміру зерен міді на швидкість росту прошарку проміжних фаз у дифузійній парі Cu-Sn // Вісник Черкаського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2015. – № 1. – С. 35-39. – Режим доступу: https://phys-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/681/702
5. Татарчук Є. В. Вплив товщини прошарку нікелю на ріст фаз у системі Cu-Ni-Sn при ізотермічному відпалі // Вісник Черкаського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2020. – № 1. – С. 59-64. – Режим доступу: https://phys-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/4226/4492
6. Wang S. J., Liu C. Y. Study of interaction between Cu-Sn and Ni-Sn interfacial reactions by Ni-Sn3.5Ag-Cu sandwich structure // Journal of Electronic Materials. – 2003. – Vol. 32, No. 11. – P. 1303-1309. – Режим доступу: https://doi.org/10.1007/s11664-003-0027-0
7. Baheti V. A. et al. Bifurcation of the Kirkendall marker plane and the role of Ni and other impurities on the growth of Kirkendall voids in the Cu-Sn system // Acta Materialia. – 2017. – Vol. 131. – P. 260-270. – Режим доступу: https://doi.org/10.1016/j.actamat.2017.03.068
8. Turlo V. V., Gusak A. M., Tu K. N. Model of phase separation and of morphology evolution in two-phase alloy // Philosophical Magazine. – 2013. – Vol. 93, No. 16. – P. 2013-2025. – Режим доступу: http://dx.doi.org/10.1080/14786435.2012.747011
9. Yu C. et al. Effect of deposit thickness during electroplating on Kirkendall voiding at Sn/Cu joints // Materials Letters. – 2014. – Vol. 128. – P. 9-11. – Режим доступу: http://dx.doi.org/10.1016/j.matlet.2014.04.091
10. Liu Y. et al. Ultra-thin intermetallic compound formation in microbump technology by the control of a low Zn concentration in solder // Materialia. – 2020. – Vol. 12. – Art. 100791. – Режим доступу: https://doi.org/10.1016/j.mtla.2020.100791
11. Yang S. C. et al. Strong Zn concentration effect on the soldering reactions between Sn-based solders and Cu // Journal of Materials Research. – 2006. – Vol. 21, No. 10. – P. 2436-2439. – Режим доступу: http://dx.doi.org/10.1557/jmr.2006.0320

References

1. Derevianko S. I., Morozovych V. V., Krasovskiy T. A., Lyashenko Yu. O. The effect of surface treatment on high-frequency smat technology on the mechanical properties of surface copper // *Cherkasy University Bulletin: Physical and Mathematical Sciences*. –

2019, № 1. – P. 60-68. – Retrieved from: https://doi.org/10.31651/2076-5851-2019-1-60-68
2. Tiutenko V. M., Morozovych V. V., Diduk V. A., Kolinko S. O., Lyashenko Yu. O. The influence of SMAT processing on microstructure of copper films electroplated in steady-state, reversed impulse and stochastic regimes // *Cherkasy University Bulletin: Physical and Mathematical Sciences*. – 2017. – № 1. – P. 63-78. – Retrieved from: https://phys-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/2334/2406
3. Prykhodko V.I. et al. Creation of Ultrasonic Equipment for Strengthening and Relaxation Treatment of the Welded Constructions in Carriage Building // *Science and Innovation*. – 2014. – V. 10, № 1. – P. 5-17. – Retrieved from: https://doi.org/10.15407/scin10.01.005
4. Tatarchuk E.V., Galat I.G. The grain size effect on phase growth rate in the Cu-Sn system // *Cherkasy University Bulletin: Physical and Mathematical Sciences*. – 2015. – № 1. – P. 35-39. – Retrieved from: https://phys-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/681/702
5. Tatarchuk Y. V. Influence of nickel layer thickness on phase growth in Cu-Ni-Sn system during isothermal annealing // *Cherkasy University Bulletin: Physical and Mathematical Sciences*. – 2020. – № 1. – P. 59-64. – Retrieved from: https://phys-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/4226/4492
6. Wang S. J., Liu C. Y. Study of interaction between Cu-Sn and Ni-Sn interfacial reactions by Ni-Sn3.5Ag-Cu sandwich structure // *Journal of Electronic Materials*. – 2003. – Vol. 32, No. 11. – P. 1303-1309. – Retrieved from: https://doi.org/10.1007/s11664-003-0027-0
7. Baheti V. A. et al. Bifurcation of the Kirkendall marker plane and the role of Ni and other impurities on the growth of Kirkendall voids in the Cu-Sn system // *Acta Materialia*. – 2017. – Vol. 131. – P. 260-270. – Retrieved from: https://doi.org/10.1016/j.actamat.2017.03.068
8. Turlo V. V., Gusak A. M., Tu K. N. Model of phase separation and of morphology evolution in two-phase alloy // *Philosophical Magazine*. – 2013. – Vol. 93, No. 16. – P. 2013-2025. – Retrieved from: http://dx.doi.org/10.1080/14786435.2012.747011
9. Yu C. et al. Effect of deposit thickness during electroplating on Kirkendall voiding at Sn/Cu joints // *Materials Letters*. – 2014. – Vol. 128. – P. 9-11. – Retrieved from: http://dx.doi.org/10.1016/j.matlet.2014.04.091
10. Liu Y. et al. Ultra-thin intermetallic compound formation in microbump technology by the control of a low Zn concentration in solder // *Materialia*. – 2020. – Vol. 12. – Art. 100791. – Retrieved from: https://doi.org/10.1016/j.mtla.2020.100791
11. Yang S. C. et al. Strong Zn concentration effect on the soldering reactions between Sn-based solders and Cu // *Journal of Materials Research*. – 2006. – Vol. 21, No. 10. – P. 2436-2439. – Retrieved from: http://dx.doi.org/10.1557/jmr.2006.0320

YE. V. TATARCHUK
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor
The Bohdan Khmelnytsky NationalUniversity of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine
etatar@ukr.net

M. O. PASICHNYY
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Head of the Department of Physics
The Bohdan Khmelnytsky NationalUniversity of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine
pasichnyy@ukr.net

INFLUENCE OF COPPER SUBSTRATE TREATMENT ON THE POROSITY OF THE Cu_3SN INTERMETALLIC PHASE DURING REACTIVE DIFFUSION IN THE Cu-Sn SYSTEM

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-58-67 PACS: 66.30.−h, 68.35.Fx, 64.70.dm, 81.05.Bx, 81.30.Bx

This paper presents a comprehensive experimental investigation into the influence of copper substrate surface preparation on the porosity and microstructure of the intermetallic Cu_3Sn phase formed during reactive diffusion in the Cu-Sn binary system. The motivation for this study stems from the growing importance of solder joint reliability in microelectronics, where the formation of intermetallic phases at the Cu-Sn interface – particularly Cu_3Sn and Cu_6Sn_5 – plays a critical role in determining the mechanical strength and electrical conductivity of connections. One of the key degradation mechanisms in these intermetallic layers is the formation of Kirkendall voids, especially within the Cu_3Sn phase, which can significantly impair device performance.

Three different types of copper substrate preparation were considered: (1) untreated copper, (2) copper subjected to recrystallization annealing at 700 °C for 5 hours, and (3) copper processed using Surface Mechanical Attrition Treatment (SMAT), which introduces a nanocrystalline surface structure by high-energy mechanical impacts. The SMAT process is known to produce a high density of lattice defects, increase grain boundary area, and thus alter diffusion behavior during intermetallic phase formation.

To simulate soldering conditions, tin layers were applied to each type of copper substrate, and the resulting diffusion couples were subjected to isothermal annealing at 230 °C for 48 hours in an argon atmosphere. The morphology and phase composition of the diffusion zones were characterized using scanning electron microscopy (SEM). To quantify porosity in the Cu_3Sn phase, SEM images were analyzed using Adobe Photoshop. The Cu_3Sn regions and pores were manually highlighted using the Polygonal Lasso Tool, and the pixel area of each was measured to compute relative porosity.

The results demonstrate a clear dependence of Cu_3Sn porosity on the initial microstructure of the copper substrate. The SMAT-treated samples exhibited the highest average porosity in the Cu_3Sn layer (2.77 %), compared to the annealed (0.23 %) and untreated (0.35 %) samples. These findings indicate that SMAT treatment significantly enhances porosity formation, which can be attributed to accelerated copper diffusion and increased defect density facilitating Kirkendall void formation. This observation aligns with existing diffusion models that predict enhanced vacancy flux and void nucleation in systems with asymmetric interdiffusion and fine-grained microstructures.

The increased porosity in SMAT-treated substrates, while indicative of intensified diffusion activity, poses challenges for the mechanical and electrical performance of solder joints. Therefore, careful control over substrate pre-treatment is essential for optimizing interfacial integrity in electronic packaging.

This study provides a detailed quantitative comparison of porosity levels under controlled experimental conditions and highlights the critical role of substrate surface engineering in reactive diffusion processes. The insights gained here can be applied to improve manufacturing technologies for micro- and nanoelectronic devices, particularly in the context of flip-chip and BGA solder joint formation.

Keywords: Cu-Sn system, Cu_3Sn phase, reactive diffusion, porosity, SMAT, solder joints.

Одержано редакцією 09.10.2024
Прийнято до друку 13.11.2024

ORCID: 0000-0001-8573-6022

Я. В. НІКОЛЕНКО

магістрант кафедри фізики, ННІ ІНФОТЕХ,
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна,
nikolenkoyarik0@gmail.com

ORCID: 0000-0001-7015-1662

Ю. О. ЛЯШЕНКО

доктор фіз.-мат. наук, професор, ННІ ІНФОТЕХ
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна,
lyashenko.yurij@gmail.com

РОЗРОБКА АВТОМАТИЗОВАНОЇ СИСТЕМИ КОНТРОЛЮ ВИПАДАННЯ РОСИ НА БАЗІ МІКРОКОНТРОЛЕРА ESP8266

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-68-80 PACS: 07.05.Hd, 07.07.Df, 84.30.Sk 84.40.Ua, 92.60.Qx

У роботі представлено розробку автоматизованої системи контролю випадання роси, яка базується на використанні мікроконтролера ESP8266-01. Система призначена для моніторингу мікрокліматичних параметрів у середовищах із підвищеною вологістю з метою запобігання утворенню конденсату на критичних поверхнях, таких як вікна. Актуальність роботи зумовлена потребою у доступних, енергоефективних рішеннях для контролю вологості та температури в побутових і промислових умовах.

Запропонована система складається з автономного модуля збору даних, блоку обробки інформації та системи керування мікрокліматичними пристроями. Основними компонентами є датчики температури та вологості DHT11, вентилятори для циркуляції повітря, мікроконтролери ESP8266, модулі живлення та керування, а також елементи Пельтьє й нагрівальні елементи. Зібрані дані передаються через локальну Wi-Fi мережу для подальшого аналізу й візуалізації в Android-додатку.

Система реалізована на принципах модульності, з використанням відкритого програмного забезпечення, що забезпечує її гнучкість, масштабованість і доступність для широкого кола користувачів. Результати тестування підтвердили достатньо високу точність роботи сенсорів, стабільність передавання даних, ефективність реагування на зміни умов, а також зручність інтеграції з мобільним застосунком для віддаленого моніторингу.

Ключові слова: автоматизована система, моніторинг мікроклімату, мікроконтролер esp32, датчики, хмарні технології.

1. Вступ

Проблема випадання роси на поверхнях у середовищах з підвищеною вологістю є актуальною в багатьох сферах - від побуту до промисловості та сільського господарства. Конденсація водяної пари може викликати псування матеріалів, сприяти появі грибків і плісняви, а також негативно впливати на теплоізоляційні властивості огороджувальних конструкцій, зокрема вікон та стін. Особливої уваги потребують віконні конструкції та підвіконня, для яких важливий постійний контроль мікрокліматичних умов з метою запобігання утворенню вологи.

На сьогоднішній день більшість існуючих систем кліматичного моніторингу є або надто складними у впровадженні, або дорогими, що обмежує їх доступність для пересічного користувача. Створення компактної автоматизованої системи, здатної прогнозувати та реагувати на появу конденсату, є важливою інженерною задачею.

Завдяки використанню недорогих мікроконтролерів, WiFi-модулів і мобільних застосунків, зокрема для Android, в роботі пропонується ефективне технічне рішення, яке легко адаптується до різних умов експлуатації [1]. Розроблена в межах цієї роботи система є модульною, відкритою для модернізації та використовує програмне забезпечення з відкритим кодом, що забезпечує її гнучкість і доступність. Автоматичний режим керування активними елементами системи реалізований на основі порівняння температури поверхні зі значенням точки роси, що обчислюється за отриманими показниками вологості та температури. Особливістю конструкції є використання двох автономних блоків збору даних, розміщених у верхній і нижній частинах вікна. Це дозволяє відстежувати температурний градієнт по висоті та точніше прогнозувати момент утворення роси. Для підвищення точності вимірювань у конструкції передбачено використання кулера, що пришвидшує досягнення температурної рівноваги датчика з навколишнім середовищем. Проведені експерименти підтвердили позитивний вплив повітряного обдуву на стабільність і точність показників, але також засвідчили потребу в калібруванні швидкості обертання вентилятора для уникнення похибок.

2. Опис архітектури системи

Запропонована система складається з трьох основних логічних блоків:

- **Портативна, автономна автоматизована система збору даних про параметри температури та вологості.**

Цей модуль призначений для вимірювання кліматичних параметрів без прив’язки до стаціонарного джерела живлення. Його конструкція включає: корпус, що змодельований та надрукований на 3D-принтері; датчик температури та вологості DHT11; 5V кулер (розмір 40×40 мм) для забезпечення циркуляції повітря; мікроконтролер ESP8266-01 з підтримкою WiFi для передавання даних; акумулятор на 3.7V для автономної роботи; DC/DC підвищуючий перетворювач MT3608 (для отримання стабільних 5V); чотири вакуумні присоски для зручного кріплення до скла чи інших поверхонь у вологих умовах.

- **Система обробки даних і керування кліматичними пристроями.**

Цей блок приймає дані від автономного модуля, розраховує точку роси та відповідно активує засоби запобігання конденсату. Основні компоненти: ESP8266-01

для обробки вхідних значень температури та вологості; система циркуляції повітря з кулерами, які працюють разом з елементами Пельтьє для осушення повітря або з нагрівачем на основі ніхромового дроту для підігріву; два 12V кулери для активної вентиляції; елементи Пельтьє для конденсації вологи; нагрівальний елемент з ніхромового дроту, намотаного на ізолятор; повітропровід Г-подібної форми, виготовлений з ПВХ труб; реле для автоматичного керування активними елементами системи.

- **Програмна частина системи.**

Усі блоки пов’язані програмно через мережу WiFi, з можливістю відображення зібраних та оброблених даних у мобільному додатку для Android.

3. Алгоритм роботи системи

Збір даних:

Для збору кліматичних параметрів використовується дві автономні системи, розміщені у верхній та нижній частинах вікна (Рис. 1). Зчитування температури та вологості здійснюється за допомогою датчиків DHT11. Для прискорення адаптації датчика до умов навколишнього середовища перед ним встановлено кулер, що забезпечує циркуляцію повітря та пришвидшує досягнення температурної рівноваги. Такий підхід дозволяє отримати більш точні показники в реальному часі [2].

Розташування двох систем збору - зверху та знизу - дає змогу відстежувати температурний градієнт по висоті вікна. Верхній датчик реєструє температуру теплішого повітря, яке менш схильне до утворення конденсату, тоді як нижній - фіксує умови, де ймовірність випадання роси є найвищою. Порівняння точок роси в обох зонах дозволяє оцінити ефективність роботи системи конвекційної циркуляції та вибрати необхідний режим роботи системи. Дані з датчиків передаються через WiFi кожні 10 секунд, що забезпечує необхідний баланс між частотою оновлення та енергоефективністю системи.

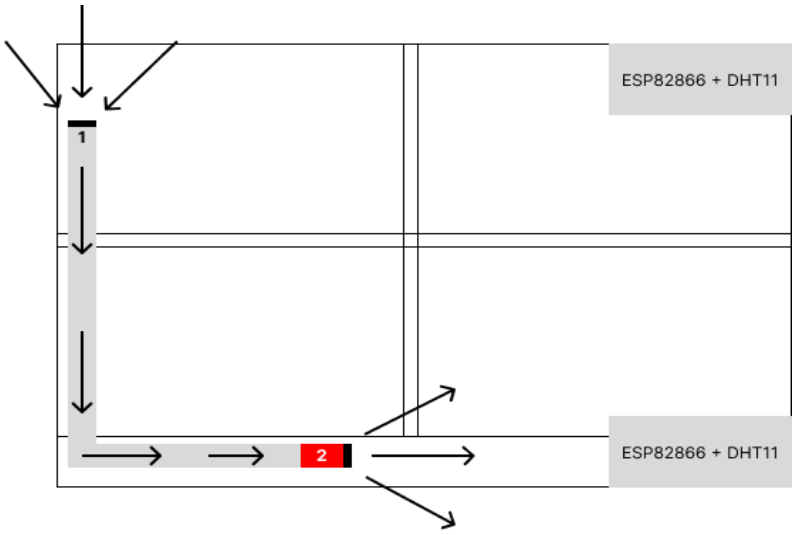


Рис. 1. Система вимірювання температури та вологості у верхній та нижній частині вікна.

Fig. 1. Temperature and humidity monitoring systems at the top and bottom of the window.

Аналіз даних:

Мікропроцесор ESP8266-01 кожні 10 секунд здійснює запити до сенсорів для отримання актуальних значень температури й вологості. На основі цих даних система автоматично обчислює температуру точки роси за відповідною формулою. У разі, якщо виконується умова $T_{(на\ склі)} \leq T_{(точки\ роси)}$ пристрій надсилає сигнал на модуль реле, який активує систему циркуляції повітря (Рис. 2).

Запуск циркуляційної системи:

Повітря циркулює в Г-подібному повітропроводі з ПВХ. Забір повітря здійснюється з верхньої частини вікна. Далі, згідно з алгоритмом, вмикається нагрівальний елемент (ТЕН) для підвищення температури повітря. Якщо протягом 15 хвилин температура не змінюється, система переходить у режим осушення: ТЕН вимикається та активується елемент Пельтьє для зниження вологості та запобігання утворенню конденсату.

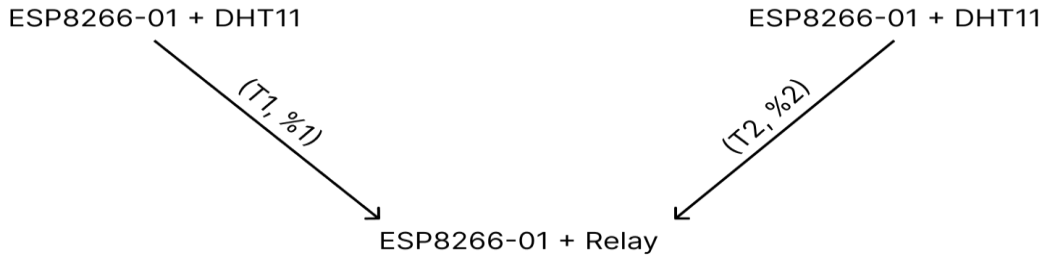


Рис. 2. Опис взаємодії ESP8266 в локальній мережі.

Fig. 2. Description of ESP8266 interaction within a local network.

4. Опис роботи системи контролю випадання роси

Якщо поточна температура знаходиться в межах ±0.5 °C від точки роси, то надсилається сигнал на реле для активації тена, що підігріває повітря. Якщо протягом 15 хвилин різниця між температурою та точкою роси не зростає щонайменше на 0.5 °C, тен вимикається, а замість нього вмикається елемент Пельтьє.

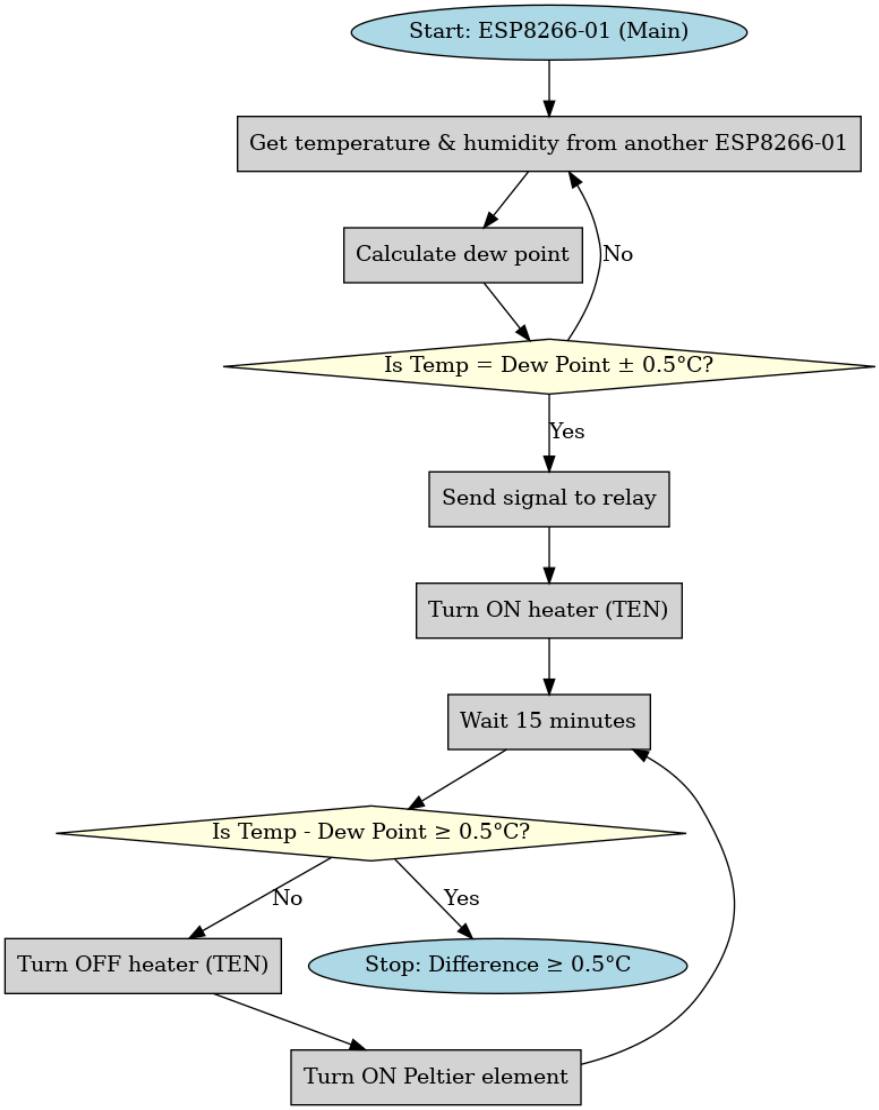


Рис. 3. Блок-схема роботи системи контролю мікроклімату.
Fig. 3. Block diagram of the microclimate control system.

Такий режим роботи зберігається доти, поки різниця між температурою та точкою роси не перевищує 0.5 °C. На Рис. 3 представлена блок-схема функціонування системи контролю утворення роси.

5. Принципова схема автономної автоматизованої системи збору даних температури та вологості.

Основна ідея розробленої системи збору даних є її портативність та компактність. Принципова схема (на основі[3]) зображена на (Рис. 4).

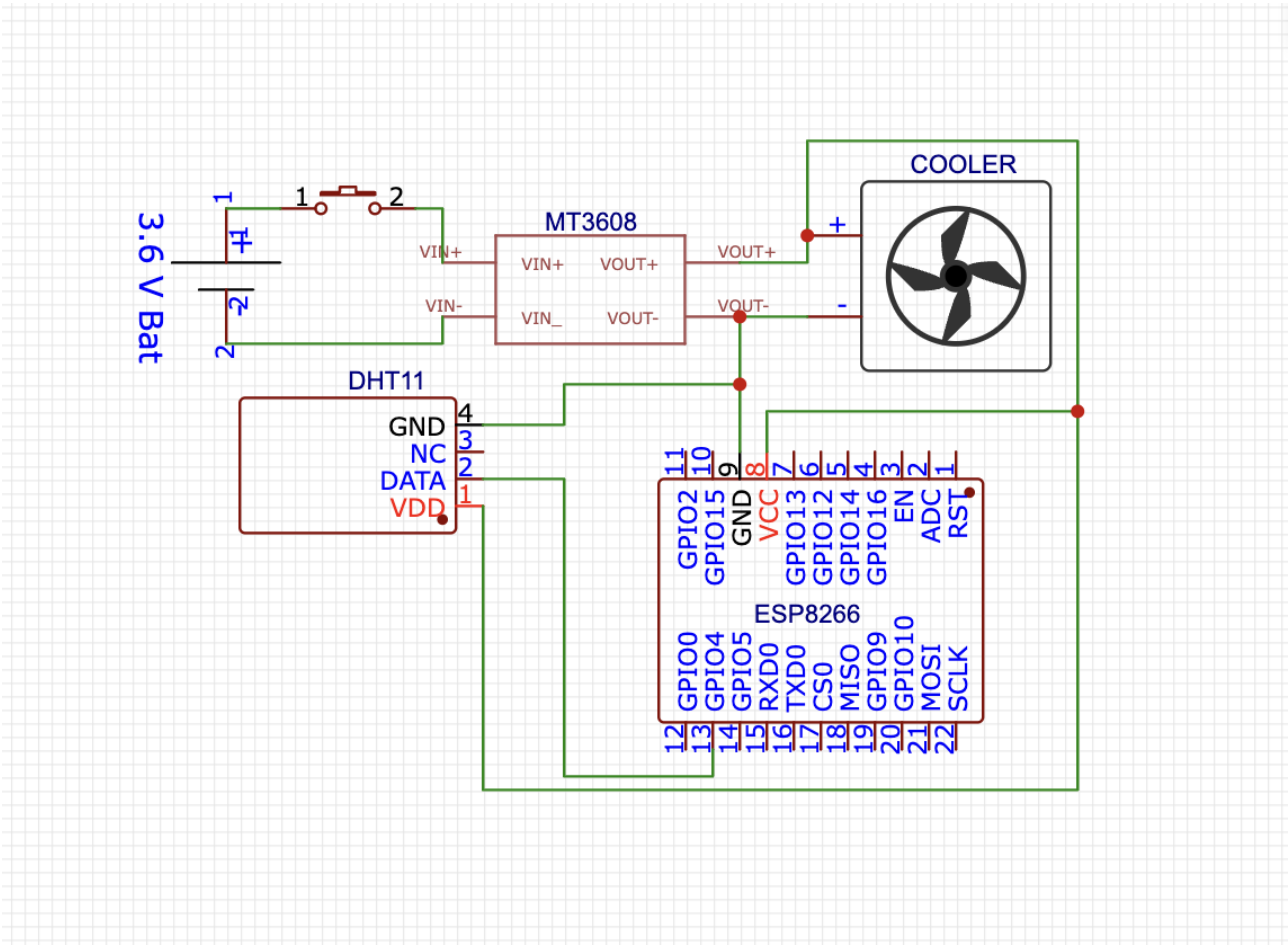


Рис. 4. Принципова схема системи збору даних.
Fig. 4. Schematic diagram of the data collection system.

У ролі джерела живлення використовується акумулятор з параметрами 3.6V та ємністю 0.6Ah, що забезпечує автономну роботу системи. Оскільки робоча напруга схеми становить 5V, застосовується підвищуючий DC-DC перетворювач типу MT3608. Керування всіма процесами здійснюється за допомогою мікроконтролера ESP8266-01, основними перевагами якого є низьке енергоспоживання (у діапазоні 1.8–3.6V, з піковим струмом до 220 мА) та наявність вбудованого Wi-Fi модуля [4]. Це дає змогу використовувати ESP8266-01 у різних режимах:

STA - підключення до Wi-Fi мережі з можливістю передавання та приймання даних;

AP - робота в режимі точки доступу з підключенням до 8 пристроїв одночасно.

Для вимірювання температури та вологості застосовується модуль DHT11. У схемі також передбачено використання вентилятора (кулера), який забезпечує постійну циркуляцію повітря через датчик, що дозволяє точніше реєструвати значення температури та вологості. Однак підхід із застосуванням вентилятора не є універсальним. Серед його переваг можна відзначити: швидке стабілізування показників, що зчитуються з датчика; мінімальна затримка при зміні температури навколишнього середовища. До недоліків належать: необхідність додаткового

калібрування системи, зокрема швидкості обертання вентилятора, оскільки надто інтенсивний потік повітря може негативно впливати на точність вимірювань. Для вивчення впливу обдуву на результати вимірювань було проведено серію експериментів, у яких порівнювалися показники двох однакових модулів DHT11 - з циркуляцією повітря через датчик та без циркуляції - в умовах приміщення з температурою 25 °C і відносною вологістю 50 %. Результати експериментів наведено в Таблиці 1.

Таблиця 1. Залежність температури та вологості від швидкості обертання кулера
Table 1. Dependence of temperature and humidity on fan rotation speed.

Швидкість кулера (RPM)	Температура (°C)	Вологість (%)
0	25	50
600	24.5	47.5
1200	24	45
1800	23.5	43.5
2400	23	41
3000	22.5	39.5

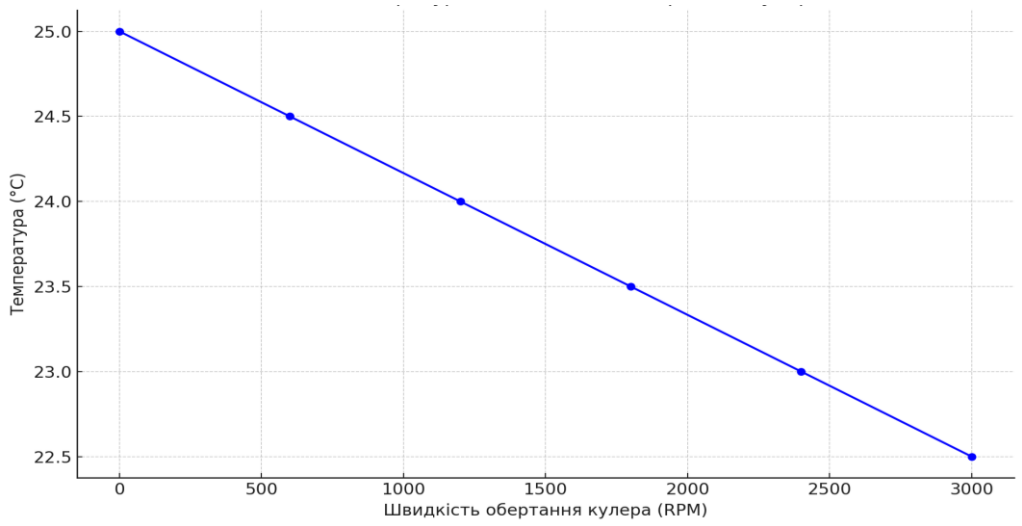


Рис. 5. Залежність температури від швидкості обдуву кулером датчика.
Fig. 5. Dependence of temperature on the airflow speed from the fan directed at the sensor.

Аналіз експериментальних даних показав, що зі збільшенням швидкості обертання кулера отримані з датчика DHT11 значення температури та вологості не відповідають її дійсним значенням. Базуючись на цьому, оптимальним значенням обертів кулера є <= 600 RPM (Rounds per minute) (див.Рис. 5).

Для написання коду і прошивання ESP8266-01 використовували середовище Arduino IDE. Скетч ESP8266-01 для керування циркуляційною системою і системою контролю мікроклімату має вигляд:

```
#include <ESP8266WiFi.h>
#include <DHT.h>
#include <ArduinoJson.h>

#define DHTPIN 2
#define DHTTYPE DHT11
DHT dht(DHTPIN, DHTTYPE);

const char* ssid = "wifi_ssid";
const char* password = "wifi_password";

IPAddress local_IP(192, 168, 1, 101);
IPAddress gateway(192, 168, 1, 1);
IPAddress subnet(255, 255, 255, 0);

const char* serverUrl = "http://192.168.1.103:80";

void setup() {
  Serial.begin(115200);

  if (!WiFi.config(local_IP, gateway, subnet)) {
    Serial.println("Failed to configure static IP");
  }

  WiFi.begin(ssid, password);
  while (WiFi.status() != WL_CONNECTED) {
    delay(1000);
    Serial.println("Connecting to WiFi...");
  }
  Serial.println("Connected!");
  dht.begin();
}

void loop() {
  float temperature = dht.readTemperature();
  float humidity = dht.readHumidity();

  if (isnan(temperature) || isnan(humidity)) {
    Serial.println("Failed to read from DHT sensor!");
    return;
```

```
  }

  StaticJsonDocument<200> jsonDoc;
  jsonDoc["temperature"] = temperature;
  jsonDoc["humidity"] = humidity;

  String jsonString;
  serializeJson(jsonDoc, jsonString);

  WiFiClient client;
  if (client.connect("192.168.1.103", 80)) { // IP ESP3
    client.println("POST /data HTTP/1.1");
    client.println("Host: 192.168.1.103");
    client.println("Content-Type: application/json");
    client.print("Content-Length: ");
    client.println(jsonString.length());
    client.println();
    client.print(jsonString);
  }
  client.stop();

  delay(10000);
}
```

Корпус для системи було виготовлено за допомогою 3D-друку. Проєктування компонентів здійснювалося з використанням онлайн-сервісу TinkerCAD - безкоштовного інструменту для створення тривимірних моделей, що дозволяє експортувати готові моделі у форматі .stl, який є сумісним із більшістю 3D-принтерів [5]. Виготовлений корпус зображено на (Рис. 6).

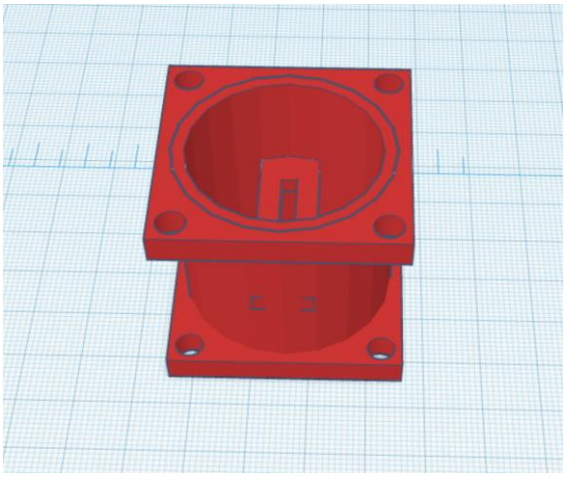


Рис. 6. 3Д модель корпусу системи збору даних.
Fig. 6. 3D model of the data collection system enclosure.

Також на корпусі були змонтовані 4 вакуумні присоски для легкого і надійного кріплення на скло (Рис. 7)

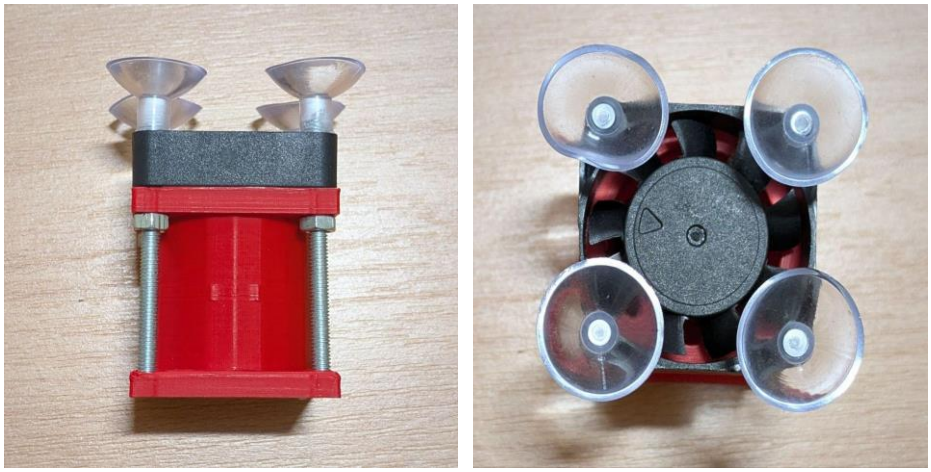


Рис. 7. Система збору значень температури та вологості.
Fig. 7. Temperature and humidity data acquisition system.

6. Результати режимів роботи

Було проведено серію з п’яти експериментів, кожен тривалістю по 20 хвилин, з метою оцінки ефективності роботи системи керування мікрокліматом. У кожному експерименті застосовувалися різні методи контролю параметрів середовища:

- лише циркуляція повітря для вирівнювання температури та вологості між верхньою та нижньою частинами вікна;
- циркуляція повітря у поєднанні з увімкненим теном для підігріву;
- циркуляція повітря з активованим елементом Пельтьє для зниження вологості.

Результати експериментів:

Циркуляція повітря без нагріву та осушення:

Початкові показники: верхня частина вікна - 16.1 °C, 47%; нижня частина - 15.7 °C, 47%.

Через 18 хв роботи системи температура стабілізувалась на рівні 15.9 °C при незмінній вологості 47%.

Різниця між точками роси знизу до і після роботи становила **0.18 °C**.

Циркуляція з увімкненим теном:

Початкові параметри знизу - 15.7 °C, 47%.

Через 18 хв температура зросла до 17.4 °C, вологість залишилася незмінною.

Різниця між точками роси до та після роботи - **0.55 °C**.

Циркуляція з увімкненим елементом Пельтьє:

Початкові значення знизу - 15.7 °C, 47%.

Через 18 хв температура залишилася на тому ж рівні, однак вологість знизилась до 43%.

Різниця між точками роси до та після - **0.94 °C**.

Висновки

Розроблено автоматизовану систему для контролю утворення роси на поверхнях у вологих середовищах. Спроектовано та виготовлено автономні пристрої для вимірювання температури та вологості на скляних поверхнях, які фіксуються за допомогою вакуумних приліплювачв. Пристрої базуються на Wi-Fi модулі ESP8266-01 та модулі DHT11. Система синхронізується з домашньою мережею та дозволяє отримувати поточні значення температури, вологості та точки роси через смартфон.

Для керування мікрокліматом розроблена система циркуляції повітря, оснащена нагрівальним елементом для підвищення температури та елементом Пельтьє для зменшення вологості.

Також було проведено серію експериментів для оцінки впливу швидкості обертання вентилятора на точність вимірювання температури та вологості. Результати показали, що зі збільшенням швидкості обертання кулера значення температури та вологості знижуються лінійно в межах допустимої похибки. Найоптимальнішим режимом виявилась швидкість обертання кулера не більше 600 об/хв. Крім того, було виконано серію досліджень ефективності роботи системи контролю утворення роси на віконному склі. У результаті встановлено, що при використанні лише циркуляції повітря різниця між початковим та кінцевим значенням точки роси становила 0.18 °C. При увімкненому електротені ця різниця зростала до 0.55 °C. Найвищу ефективність показав режим з увімкненим елементом Пельтьє, де різниця температур точки роси досягла 0.94 °C.

Отже, підсумовуючи результати експериментів, можна зробити висновок, що найефективнішим способом регулювання мікроклімату є осушення повітря за допомогою елемента Пельтьє.

Список використаної літератури:

1. Плющ А. Г. Система автоматичного керування та моніторингу клімату приватного будинку / А. Г. Плющ // *Master's thesis, Сумський державний університет*. – 2023. Режим доступу: https://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/93790
2. Лубко Д. Методологія проектування Arduino в якості Web-client та Web-server з використанням датчика DHT11 та їх порівняльна характеристика / Д. Лубко, Ю. Литвин // *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Нові рішення у сучасних технологіях*. – 2017. – Том. 32, №1254. – С. 62-67. Режим доступу: https://doi.org/10.20998/2413-4295.2017.32.10
3. Guide to 1-Wire Communication [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.maximintegrated.com/en/design/technical-documents/tutorials/1/1796.html.
4. Gupta, S. Internet of Things: Robotic and Drone Technology / S. Gupta // MRIIRS, Faridabad, Haryana, India. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://doi.org/10.1201/9781003181613-11

5. Kelly, J. F. (2014). 3D Modeling and Printing with Tinkercad: Create and Print Your Own 3D Models. Que Publishing. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: ISBN: 9780133798135

References

1. Pliushch, A. H. (2023). Automatic climate control and monitoring system for a private house (Master's thesis, Sumy State University). Retrieved from https://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/93790
2. Lubko, D., & Lytvyn, Y. (2017). Methodology for designing Arduino as a Web-client and Web-server using the DHT11 sensor and their comparative characteristics. Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: New Solutions in Modern Technologies, (32 (1254)), 62–67. Retrieved from https://doi.org/10.20998/2413-4295.2017.32.10
3. Guide to 1-Wire Communication [Electronic resource]. – Available at: https://www.maximintegrated.com/en/design/technical-documents/tutorials/1/1796.html
4. Gupta, S. Internet of Things: Robotic and Drone Technology / S. Gupta // MRIIRS, Faridabad, Haryana, India. [Electronic resource]. – Available at: https://doi.org/10.1201/9781003181613-11
5. Kelly, J. F. (2014). 3D Modeling and Printing with Tinkercad: Create and Print Your Own 3D Models. Que Publishing. [Electronic resource]. – Available at: ISBN: 9780133798135.

YA. V. NIKOLENKO
Magistr of Physics Department,
Educational-Scientific Institute of Informational and Eduational Technologies
The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,
nikolenkoyarik0@gmail.com

YU. O. LYASHENKO
Doctor of physical and mathematical sciences, Professor of the Department of Physics,
The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine,
urico@ukr.net

DEVELOPMENT OF AN AUTOMATED DEW CONTROL SYSTEM BASED ON THE ESP8266 MICROCONTROLLER.

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-68-80 PACS: 07.05.Hd, 07.07.Df, 84.30.Sk 84.40.Ua, 92.60.Qx

This paper presents the development of an automated dew formation control system based on the ESP8266-01 microcontroller. The system is designed to monitor microclimatic parameters in high-humidity environments to prevent condensation on critical surfaces such as windows. The relevance of this work is driven by the need for affordable, energy-efficient solutions for controlling humidity and temperature in domestic and industrial settings.

The proposed system consists of an autonomous data acquisition module, a data processing unit, and a microclimate control system. The main components include DHT11 temperature and humidity sensors, fans for air circulation, ESP8266 microcontrollers, power

and control modules, as well as Peltier elements and heating elements. The collected data is transmitted via a local Wi-Fi network for further analysis and visualization in an Android application.

A distinctive feature of the design is the use of two autonomous data acquisition blocks placed at the top and bottom of the window. This allows for monitoring the temperature gradient along the height and more accurately predicting the point of dew formation. The automatic control mode for the system’s active elements is implemented based on comparing the surface temperature with the calculated dew point, determined from the collected humidity and temperature data.

To improve measurement accuracy, the design includes a fan that accelerates the sensor's adaptation to the surrounding environment. Experimental results confirmed the positive impact of air circulation on the stability and accuracy of the readings, but also highlighted the need for calibration of the fan speed to avoid errors.

The system is implemented based on modular principles, using open-source software, ensuring flexibility, scalability, and accessibility for a wide range of users. Test results confirmed the high accuracy of the sensor operation, stable data transmission, effective response to environmental changes, and ease of integration with a mobile application for remote monitoring.

Keywords: automated system, microclimate monitoring, ESP32 microcontroller, sensors, cloud technologies.

Одержано редакцією 20.10.2024
Прийнято до друку 25.11.2024

ORCID: 0000-0002-4950-394X
А. Р. ГОНДА
аспірант, ННІ ІНФОТЕХ
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького, Черкаси, Україна,
andriy.gonda@gmail.com

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-81-88 PACS: 05.70.Ln, 02.60.-x, 02.60.Pn

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ПОБУДОВИ ПРОВІДНОГО КЛАСТЕРА СФОРМОВАНОГО ЗА ДОПОМОГОЮ КАРБОНОВИХ НАНОТРУБОК У ДІЕЛЕКТРИЧНІЙ МАТРИЦІ

Розроблено двовимірну стохастичну модель для побудови та дослідження порогу перколяції провідного кластера, що утворено за допомогою карбонових нанотрубок, що випадково розміщені в полімерній діелектричній матриці.

У роботі розроблено двовимірну стохастичну модель, що на основі аналогії із задачею Бюффона дозволяє імітувати випадкове розміщення карбонових нанотрубок у полімерній матриці та виявляти утворення провідних кластерів на планарній сітці. Проведено систематичний аналіз впливу ключових параметрів на ймовірність перколяції: показано, що збільшення кількості нанотрубок прискорює перехід до провідного стану, а подовження трубок знижує критичну концентрацію в наповнювачі, що необхідна для формування безперервного електропровідного шляху. Досліджено також розмірний ефект: із ростом розмірів сітки перехід від непровідного до провідного стану композитного середовища згладжується. Для аналітичного опису перколяційної кривої здійснено перехід від апроксимації за гіперболічним тангенсом до логістичної функції, що спрощує оцінювання порогових параметрів системи.

Отримані результати дають змогу оцінити критичні параметри, необхідні для виникнення електричної провідності в композитних наноматеріалах на основі карбонових нанотрубок в діелектричних матрицях.

Ключові слова: композитна матриця, стохастична модель, задача Бюффона, електропровідність, перколяція, перколяційний кластер, карбонові нанотрубки.

1. Вступ

Електропровідні полімерні композити, наповнені карбоновими нанотрубками, є перспективними матеріалами, завдяки поєднанню унікальних механічних, теплових та електричних властивостей. Завдяки наявності в подібних матеріалах альтернативних електричних шляхів сформованих по границях перетину нанотрубок матеріали на основі композитних матриць мають перспективи в розробці електронагрівальних елементів, гнучкої електроніки, сенсорних пристроїв та систем накопичення енергії [1]. Ключове явище, що зумовлює появу макроскопічної провідності в таких матеріалах —

перколяція: при перевищенні критичної концентрації нанотрубок формується суцільна мережа, яка дозволяє проводити електричний струм від одного електрода до іншого. Точне визначення перколяційного порогу є важливим для раціонального проєктування композитів із заданими електричними характеристиками.

У цій роботі запропоновано двовимірну стохастичну модель, натхненну класичною задачею Бюффона [2]. Карбонові нанотрубки у вигляді голок фіксованої довжини випадково розміщуються та орієнтуються на планарній сітці, що моделює полімерну діелектричну матрицю з електродами зліва та справа. Кожна «голка» позначає найближчі вузли сітки, утворюючи бінарну карту заповнення. Далі за допомогою алгоритму пошуку кластерів визначається наявність провідної структури, що сполучає електроди. На основі моделі проведено дослідження впливу кількості карбонових нанотрубок, їх довжини, розміру сітки та густини заповнення на ймовірність перколяції.

2. Постановка задачі

Для дослідження ймовірності утворення провідного кластера використано стохастичний метод, що подібний до задачі Бюффона [3], але для двовимірного випадку. Для дослідження вибрано переріз провідної пластини в якій на електроди (зліва та справа) подана різниця потенціалів. Простір між електродами розділений на рівномірну за відстанню просторову сітку, на якій можуть знаходитись карбонові нанотрубки в довільній кутовій орієнтації. Для цього вибирають фіксовану кількість n карбонових «голок» з фіксованою довжиною L. Для дослідження, що голка дійсно потрапляє на конкретні вузли сітки її кидають зверху та визначають до яких вузлів сітки голка знаходиться найближче. Відповідні вузли сіток маркуються числовим позначенням (1 – голка накладається, 0 – перетину нема). Спочатку вся сітка ініціалізована нулями. Після розкидання голок з довільною орієнтацією на сітці відбувається спроба побудови перколяційного кластеру, який проводить струм в напрямку зліва направо.

Приклад побудованого кластеру показано на Рис. 1.

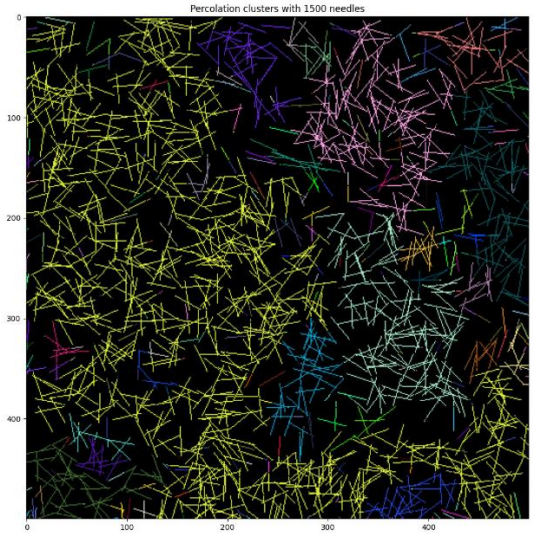


Рис. 1. Побудова провідних кластерів на основі провідних голок

Fig 1. Conductive clusters composition based on conductive needles

3. Дослідження залежності ймовірності перколяції від кількості та довжини карбонових нанотрубок

Для перевірки поведінки модельної системи за наявності різної кількості голок та змінної довжини нанорозмірних трубок (голок) побудовано залежність ймовірності перколяції від кількості голок, що має показати, яка концентрація голок необхідна для того, щоб забезпечити провідність в системі. Для цього в сітці фіксованих розмірів, а саме 500x500, кількість голок поступового змінювали та перевіряли ймовірність утворення провідного кластеру в результаті 100 запусків. Кількість успішних запусків з утворенням провідного кластеру до загальної кількості запусків показує ймовірність перколяції за заданого коефіцієнта заповнення. Отримана залежність ймовірності перколяції провідного кластеру від кількості голок показана на Рис. 2.

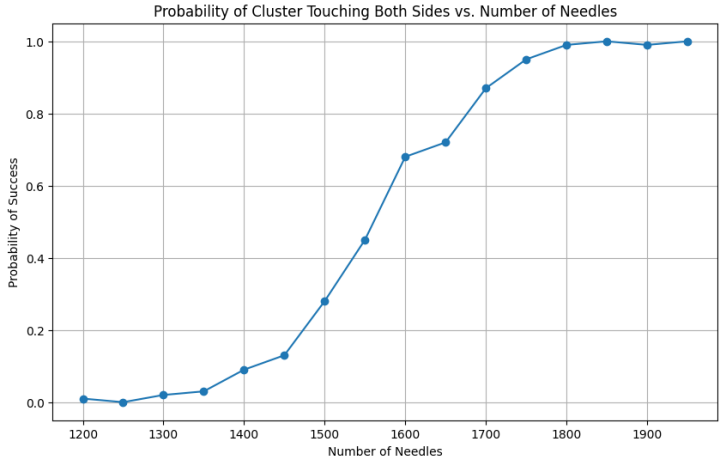


Рис. 2. Ймовірність утворення провідного кластеру від кількості голок.
Fig. 2. Conductive cluster creation probability dependent on needles count.

Також, було досліджено залежність ймовірності перколяції від довжини голок. Алгоритм отримання залежності ймовірності перколяції є подібним до вищеописаного, єдина відмінність, що фіксація ймовірності перколяції здійснювалась за фіксованої кількості провідних голок за їх змінної довжини в одиницях просторової сітки. Отримана залежність ймовірності перколяції від довжини голок показано на Рис. 3.

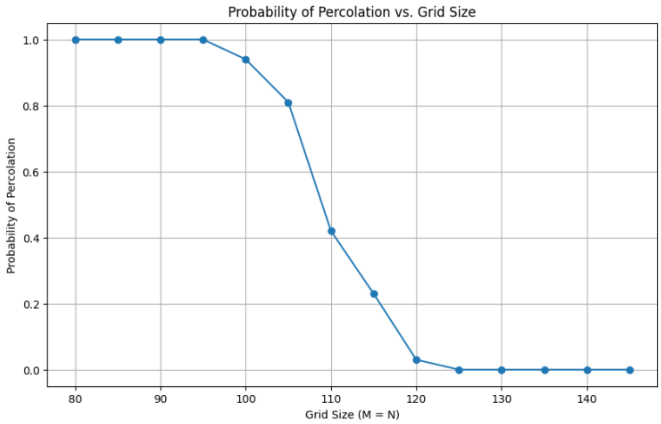


Рис 3. Ймовірність перколяції в залежності від довжини провідних нанотрубок.

Fig 3. Conductive cluster percolation probability depends on the length of conductive nanotubes.

Додатково досліджено ймовірність перколяції провідного кластеру від розміру сітки модельної системи. Залежність розмірного ефекту модельної системи показано на Рис. 4. Для отримання залежності розмір сітки було взято квадратним, тобто, $N=M$. Кількість нанотрубок та їх довжина в ході дослідження залежності були фіксовані.

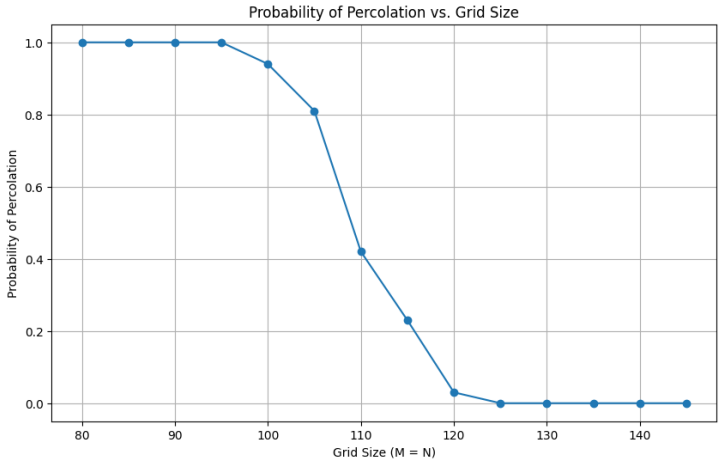


Рис 4. Залежність перколяції провідного кластеру від розміру модельної сітки.
Fig 4. Conductive cluster percolation probability depends on the model grid size.

Досліджено також залежність ймовірності перколяції провідного кластеру від густини перколяції. Густина перколяції була визначена як відношення кількості голок n до загальної площі сітки (N×M). Залежність ймовірності перколяції провідного кластеру від густини перколяції показана на Рис 5.

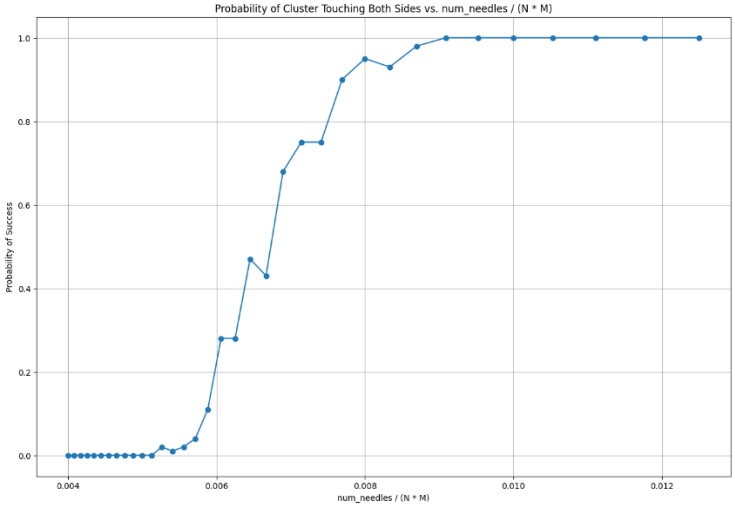


Рис 5. Залежність імовірності перколяції провідного кластеру від густини перколяції.
Fig 5. Conductive cluster percolation probability is based on percolation density.

Отримана залежність імовірності перколяції провідного кластеру від густини перколяції добре апроксимується за допомогою тангенса гіперболічного. Наближення з використанням цього припущення показано на Рис. 6.

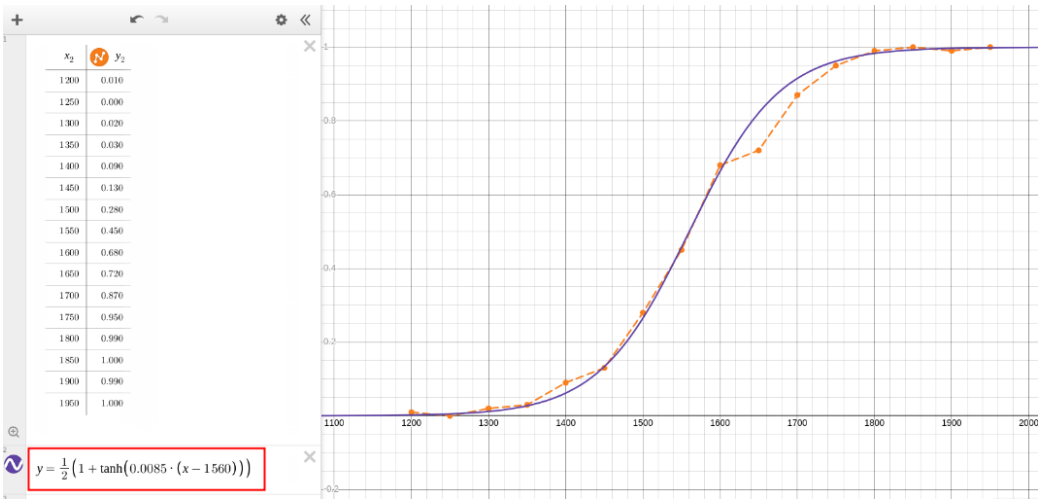


Рис 6. Наближення залежності імовірності перколяції провідного кластеру від густини перколяції за допомогою тангенса гіперболічного.

Fig 6. Conductive cluster percolation dependence by density of percolation approximation based on tanh.

Враховуючи результат наближення, можна показати, що залежність ймовірності перколяції кластеру P від густини перколяції $\rho = \frac{n}{N \times M}$ добре апроксимується наступною функцією:

$$P(\rho) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left(k\left(\rho - \rho_p\right)\right)\right), \quad (1)$$

де ρ_p – поріг перколяції.

Враховуючи властивості тангенса гіперболічного, можна показати, що

$$P(\rho) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left(k\left(\rho - \rho_p\right)\right)\right) = \frac{1}{1 + e^{-2k(\rho - \rho_p)}} \quad (2)$$

Введемо наступні заміни: $x = \rho - \rho_p$, та $K = 2k$ тоді вираз набуде вигляду:

$$P(x) = \frac{1}{1 + e^{-Kx}} \quad (3)$$

Взявши похідну по x, отримаємо:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}(1 + e^{-Kx})^{-1} = \frac{Ke^{-Kx}}{(1 + e^{-Kx})^2} \quad (4)$$

Вираз e^{-Kx} можна переписати через саму функцію $P(x)$, звідси:

$$\frac{dP}{dx} = KP(x) \cdot (1 - P(x)) \quad (5)$$

Подібна структура рівняння є аналогічною до логістичного рівняння [5] та вказує на те, що залежність ймовірності перколяції від густини перколяції може бути описана логістичною кривою.

4. Висновки

Розроблено двовимірну стохастичну модель яка на основі аналогії з задачею Бюффона дозволяє ефективно моделювати розміщення карбонових нанотрубок (голок) у полімерній матриці та визначати утворення провідних кластерів на просторовій сітці.

Проведено систематичний аналіз залежності ймовірності перколяції від ключових чинників:

- **кількості нанотрубок:** збільшення числа нанотрубок призводить до швидшого переходу до провідного стану;
- **довжини нанотрубок:** довші трубки зменшують критичну концентрацію для перколяції;
- **розміру сітки:** виявлено ефект розмірного масштабування, який впливає на плавність переходу.

Здійснено перехід від вигляду апроксимаційної функції у формі тангенса гіперболічного до логістичної кривої. Було показано, що функція виду:

$$P(\rho) = \frac{1}{1 + e^{-K(\rho - \rho_p)}}$$

є математично еквівалентною гіперболічному тангенсу при $K = 2k$, що пов'язує отриману залежність з рівнянням логістичної кривої.

Подяки.

Автор висловлює подяку професору Гусаку А.М. за надання консультацій під час розробки моделі. Робота виконувалась за підтримки МОН України в рамках виконання НТР, № держреєстрації 0123U104477.

Список використаної літератури:

1. Behbahani A. F., Foroozani, et al. Electrical percolation behavior of carbon fiber and carbon nanotube polymer composite foams: Experimental and computational investigations // Journal of Applied Polymer Science. – 2015. – Vol. 132, No. 42. Режим доступу: http://dx.doi.org/10.1002/app.42685
2. Yat, C. H. Investigation On Buffon-Laplace Needle Problem / C. H. Yat, F. P. Kiu, L. S. Him, L. K. C. Justin, T. S Lam, Man, C. Cheung // . – 2021. Режим доступу: https://hlma.hanglung.com/getattachment/f46f7ae5-2afb-4df5-996b-5eedd47996a3/17-hm_wyk.pdf
3. Arnow B. J. On Laplace's extension of the Buffon needle problem / B. J. Arnow // *The College Mathematics Journal*. – 1994. – Vol. 25, No. 1. – P. 40–43. Режим доступу: https://doi.org/10.1080/07468342.1994.11973580
4. Law R. Dieckmann U. Population growth in space and time: spatial logistic equations / R. Law, D. J. Murrell // *Ecology.* – 2003. – Vol. 84, No. 1. – P. 252–262. Режим доступу: https://doi.org/10.1890/0012-9658(2003)084[0252:PGISAT]2.0.CO;2
5. Groff J. R. Exploring dynamical systems and chaos using the logistic map model of population change / J. R. Groff // *American Journal of Physics.* – 2013. – Vol. 81, No. 10. – P. 725–732. Режим доступу: https://doi.org/10.1119/1.4813114

References:

1. Behbahani, A. F., Motlagh, G. H., Ziaee, M., & Nikravan, G. (2015). Electrical percolation behavior of carbon fiber and carbon nanotube polymer composite foams: Experimental and

computational investigations. *Journal of Applied Polymer Science*, *132*(42). Retrieved from http://dx.doi.org/10.1002/app.42685
2. Yat, C. H., Kiu, F. P., Him, L. S., Justin, L. K. C., Lam, T. S., & Man, C. W. (2021) Investigation On Buffon-Laplace Needle Problem. Retrieved from https://hlma.hanglung.com/getattachment/f46f7ae5-2afb-4df5-996b-5eedd47996a3/17-hm_wyk.pdf
3. Arnow, B. J. (1994). On Laplace's extension of the Buffon needle problem. *The College Mathematics Journal*, *25*(1), 40-43. Retrieved from https://doi.org/10.1080/07468342.1994.11973580
4. Law, R., Murrell, D. J., & Dieckmann, U. (2003). Population growth in space and time: spatial logistic equations. *Ecology*, *84*(1), 252-262. Retrieved from https://doi.org/10.1890/0012-9658(2003)084[0252:PGISAT]2.0.CO;2
5. Groff, J. R. (2013). Exploring dynamical systems and chaos using the logistic map model of population change. *American Journal of Physics*, *81*(10), 725-732. Retrieved from https://doi.org/10.1119/1.4813114

A. R. HONDA
PhD-student,
Educational-Scientific Institute of Informational and Eduational Technologies
The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine
andriy.gonda@gmail.com

STOCHASTIC MODEL FOR CONSTRUCTING A CONDUCTIVE CLUSTER FORMED BY CARBON NANOTUBES ON A COMPOSITE GRID

DOI: 10.31651/2076-5851-2024-81-88 PACS: 05.70.Ln, 02.60.-x, 02.60.Pn

A two-dimensional stochastic model has been developed for constructing and investigating the percolation threshold of a conductive cluster. The cluster is formed by carbon nanotubes embedded in a polymer dielectric matrix.

In this work, a two-dimensional stochastic model was developed, which, based on an analogy with Buffon's needle problem, simulates the random distribution of carbon nanotubes in the polymer matrix and detects the formation of conductive clusters on a planar grid. A systematic analysis of the influence of key parameters on the probability of percolation was carried out: it was shown that increasing the number of nanotubes accelerates the transition to a conductive state, while elongation of the nanotubes reduces the critical filler concentration required to form a continuous path. The size effect was also investigated: as the grid size increases, the transition from non-conductive to conductive state becomes smoother. For the analytical description of the percolation curve, the approximation using the hyperbolic tangent was replaced with a logistic function, which simplifies the estimation of the system’s threshold parameters.

The obtained results make it possible to evaluate the critical parameters necessary for the emergence of electrical conductivity in composite nanomaterials based on carbon nanotubes.

Keywords: composite matrix, stochastic model, Buffon needle problem, electoconductivity, percolation, percolation cluster, carbon nanotubes.

Одержано редакцією 28.10.2024
Прийнято до друку 02.12.2024

Зміст

ПОБУДОВА КЕРУВАННЯ, ЩО ЗАБЕЗПЕЧУЄ ТРЕКІНГ ЛІДЕРА У СИСТЕМІ БПЛА ПЛАНЕРНОГО ТИПУ
С. В. Бабенко
А. В. Гончаренко *3*

ОЦІНКА КОРЕЛЯЦІЙНОЇ РОЗМІРНОСТІ АТРАКТОРІВ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ МАТРИЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ (CDM - МЕТОД)
В. А. Гавриш
В. С. Денисенко *21*

РОЗРОБКА МЕТРИКИ ЯКОСТІ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ ОБ'ЄКТІВ ДЛЯ БАГАТОВИМІРНИХ ПРОСТОРІВ
Д. О. Ступак *37*

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРО- та ТЕПЛОПРОВІДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНИХ ЕЛЕКТРОНАГРІВАЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ПЛОСКИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ
В. В. Морозович
Д. І. Коломієць
А. Р. Гонда
Ю. О. Ляшенко *46*

ВПЛИВ ОБРОБКИ МІДНОЇ ПІДЛОЖКИ НА ПОРИСТІСТЬ ІНТЕРМЕТАЛЕВОЇ ФАЗИ Cu_3Sn ПРИ РЕАКЦІЙНІЙ ДИФУЗІЇ У СИСТЕМІ Cu-Sn
Є. В. Татарчук
М. О. Пасічний *58*

РОЗРОБКА АВТОМАТИЗОВАНОЇ СИСТЕМИ КОНТРОЛЮ ВИПАДАННЯ РОСИ НА БАЗІ МІКРОКОНТРОЛЕРА ESP8266
Я. В. Ніколенко
Ю. О. Ляшенко *68*

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ПОБУДОВИ ПРОВІДНОГО КЛАСТЕРА СФОРМОВАНОГО ЗА ДОПОМОГОЮ КАРБОНОВИХ НАНОТРУБОК У ДІЕЛЕКТРИЧНІЙ МАТРИЦІ
А. Р. Гонда *81*

Content

“LEADER-FOLLOWER TRACKING CONTROL FOR GLIDING UAVs SYSTEM”
S. V. Babenko
A. V. Honcharenko *3*

ESTIMATION OF THE CORRELATION DIMENSION OF DYNAMICAL SYSTEM ATTRACTORS BASED ON MATRIX COMPUTATIONS (CDM - METHOD)
V. A. Havrysh
V. S. Denysenko *21*

DEVELOPMENT OF OBJECT CLUSTERING QUALITY METRIC FOR MULTIDIMENSIONAL SPACES
D.O. Stupak *37*

INVESTIGATION OF ELECTRICAL AND THERMAL CONDUCTIVE PROPERTIES OF COMPOSITE HEATING ELEMENTS WITH FLAT ELECTRODES
V. V. Morozovych
D. I. Kolomiiets
A. R. Honda
Yu. O. Lyashenko *46*

INFLUENCE OF COPPER SUBSTRATE TREATMENT ON THE POROSITY OF THE Cu_3Sn INTERMETALLIC PHASE DURING REACTIVE DIFFUSION IN THE Cu-Sn SYSTEM
Ye. V. Tatarchuk
M. O. Pasichnyy *58*

DEVELOPMENT OF AN AUTOMATED DEW CONTROL SYSTEM BASED ON THE ESP8266 MICROCONTROLLER
Ya. V. Nikolenko
Yu. O. Lyashenko *68*

STOCHASTIC MODEL FOR CONSTRUCTING A CONDUCTIVE CLUSTER FORMED BY CARBON NANOTUBES ON A COMPOSITE GRID
A. R. Honda
81

ВІСНИК
ЧЕРКАСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Серія фізико-математичні науки
№1. 2024

Відповідальний за випуск:
Ляшенко Ю.О.

Відповідальний секретар:
Сторожук Н.В.